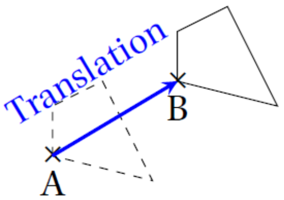
Mathématiques 2nd	<u>Chapitre 6 :</u> Vecteurs et opérations	Géométrie

<u>I – Notions de vecteurs :</u>

<u>a) La translation :</u>

Intuitivement, une translation est une transformation géométrique qui correspond à l'idée de glissement d'un objet, sans rotation, retournement ni déformation de cet objet.

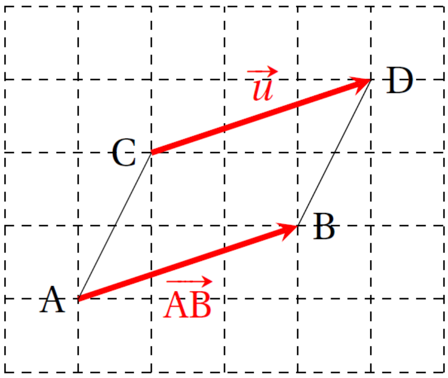


☐ <u>Définition d'un vecteur</u>

Soient A, B et C des points distincts du plan.

- La translation qui transforme A en B, est appelée translation de vecteur $\overrightarrow{AB}$.
- Un point D est obtenu à partir d'un point C par la translation qui transforme A en B lorsque le quadrilatère ABDC est un **parallélogramme**.
- On dit alors que **D** est l'**image** du point **C** par la **translation** de vecteur $\overrightarrow{\mathbf{AB}}$**.**
- Tout vecteur $\overrightarrow{AB}$ est caractérisé par :
  - sa **direction** : celle de la droite (AB) ou une parallèle à (AB).
  - son **sens**: $\overrightarrow{AB}$ indique qu'on va A $\xrightarrow{vers}$ B.
  - sa **longueur** : la longueur AB qu'on appelle norme du vecteur et qui est noté $\|\overrightarrow{AB}\|$.

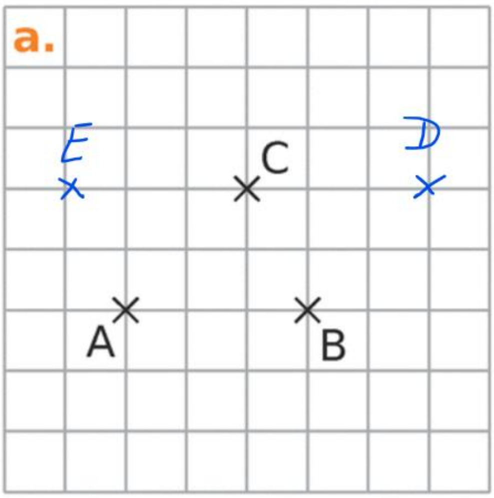
❖ <u>**Remarque :**</u>



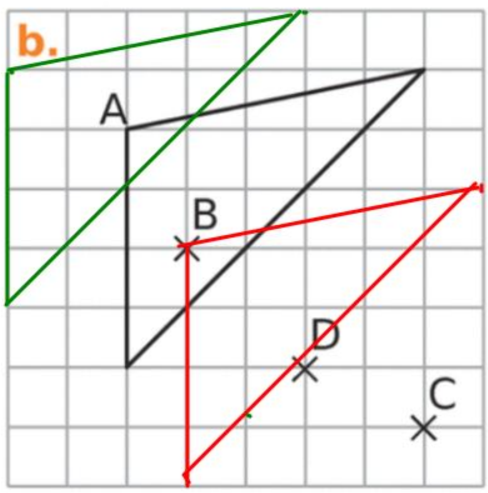
- Les droites (AB) et (CD) sont parallèles (directions identiques) ;
- Les longueurs AB et CD sont égales : $AB = CD$;
- $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{CD}$ sont orientés dans le même sens de A vers B ou de C vers D.
- On dit que le vecteur $\vec{u}$ est **un représentant** du vecteur $\overrightarrow{AB}$ et il peut être représenté n'importe où dans le plan.

❖ <u>**Exercice :**</u>

a) Construire le point D, image de C par la translation de vecteur $\overrightarrow{AB}$, puis le point E, image de A par la translation $\overrightarrow{BC}$



b) Construire en rouge l'image du triangle par la translation de vecteur $\overrightarrow{AB}$, puis en vert l'image du triangle par la translation $\overrightarrow{CD}$

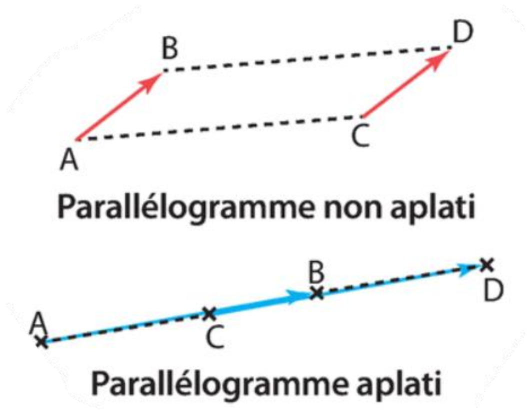


b) Égalité de vecteurs :

☐ Définition : Egalité de deux vecteurs

L'égalité $\overrightarrow{\mathbf{AB}} = \overrightarrow{\mathbf{CD}}$ signifie que la translation de vecteur $\overrightarrow{AB}$ transforme C en D.

$\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{CD}$ ont donc **la même direction** et le **même sens** et la **même norme.**



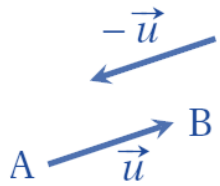
☐ Propriété : Caractérisation du parallélogramme

$\overrightarrow{\mathbf{AB}} = \overrightarrow{\mathbf{CD}}$ **sont égaux** si et seulement si le quadrilatère ABDC est un parallélogramme (éventuellement aplati).

☐ Des vecteurs particuliers :

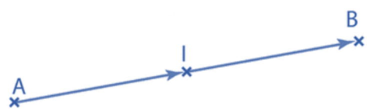
- Le **vecteur nul**, noté $\vec{0}$, est le vecteur $\overrightarrow{AA} = \overrightarrow{BB} = \overrightarrow{CC} = \vec{0}$ ….
- Le **vecteur opposé** à $\overrightarrow{AB}$ est le vecteur $-\overrightarrow{AB}$.

C'est le vecteur qui a la même direction, la même norme que le vecteur $\overrightarrow{AB}$ mais qui est de sens opposé. On a alors : $-\overrightarrow{\mathbf{AB}} = \overrightarrow{\mathbf{BA}}$



☐ Propriété : Caractérisation du milieu d'un segment

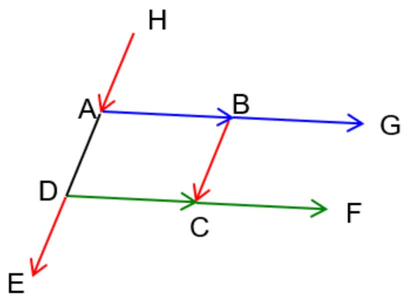
I est le milieu du segment [AB], si et seulement si $\overrightarrow{AI} = \overrightarrow{IB}$



❖ **Méthode : Construire un point défini à partir de vecteurs.**

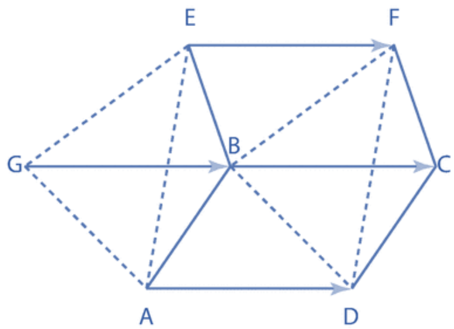
ABCD est un parallélogramme.
Construire les points E,F,G et H tels que :

$\overrightarrow{DE} = \overrightarrow{BC}$; $\overrightarrow{CF} = \overrightarrow{DC}$;
$\overrightarrow{BG} = \overrightarrow{AB}$; $\overrightarrow{HA} = \overrightarrow{BC}$



❖ **Méthode : Démontrer avec les égalités de vecteurs.**

BCDA et BCFE sont deux parallélogrammes.
1. Démontrer que ADFE est un parallélogramme.
2. G est le symétrique de C par rapport à B.
   Démontrer que GBFE est un parallélogramme



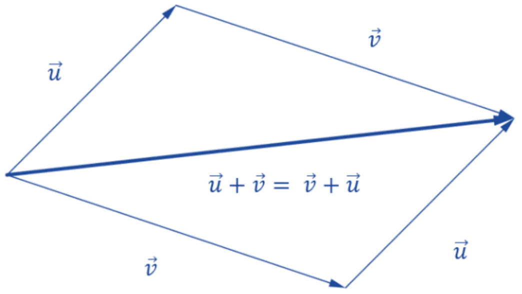
1. BCDA est un parallélogramme donc $\overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AD}$.
BCFE est un parallélogramme donc $\overrightarrow{BC} = \overrightarrow{EF}$. On en déduit donc que $\overrightarrow{AD} = \overrightarrow{EF}$ ce qui est équivalent à ADFE est un parallélogramme.

2. G est le symétrique de C par rapport à B donc B est le milieu de [GC]. On en déduit donc que $\overrightarrow{GB} = \overrightarrow{BC}$.
Or, $\overrightarrow{BC} = \overrightarrow{EF}$ donc $\overrightarrow{GB} = \overrightarrow{EF}$, ce qui est équivalent à GBFE est un parallélogramme.

II – Somme de vecteurs :

☐ Définition : Vecteur somme

La **somme** de deux vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ est le vecteur associé à la translation correspondant à **l'enchainement des translations** de vecteur $\vec{u}$ et du vecteur $\vec{v}$

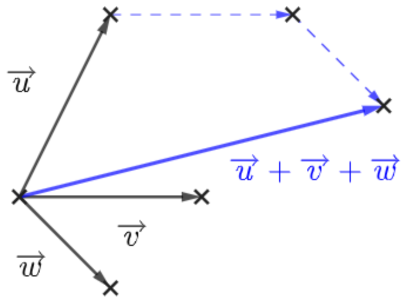


Remarque : on peut enchainer les deux translations dans l'ordre que l'on veut, on obtient la même translation, donc : $\vec{u}+\vec{v}=\vec{v}+\vec{u}$

☐ Propriété : Généralités

Pour tous vecteurs : $\vec{u}$, $\vec{v}$, $\vec{w}$:

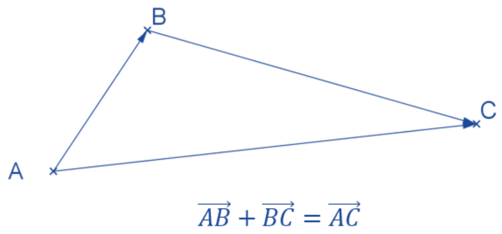
- La somme est commutative.
- $(\vec{u}+\vec{v})\ +\ \vec{w}\ =\ \vec{u}+(\ \vec{v}+\vec{w})$, que l'on peut aussi écrire $\vec{u}+\ \vec{v}+\vec{w}$.
- $\vec{u}+(-\vec{u})=\vec{0}$, la somme d'un vecteur et de son opposé est le vecteur nul.
- $\vec{u}+\vec{0}=\vec{u}$ on obtient la même translation, donc : $\vec{u}+\vec{v}=\vec{v}+\vec{u}$
- $\vec{u}-\vec{v}=\vec{u}+(-\vec{v})$



☐ Relation de Chasles

Pour tous points A, B et C du plan, on a :

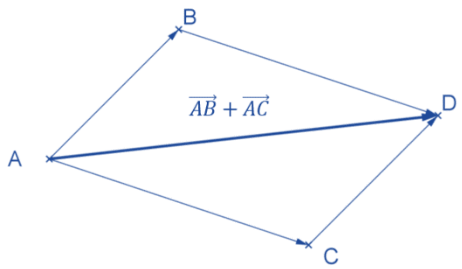
$$\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{AC}$$



☐ Règle du parallélogramme

Pour tous points A, B, C et D du plan, on a :

$\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{AD}$, si et seulement si, le quadrilatère ABCD est un parallélogramme.



❖ **<u>Méthode :</u> Construire la somme de vecteurs**

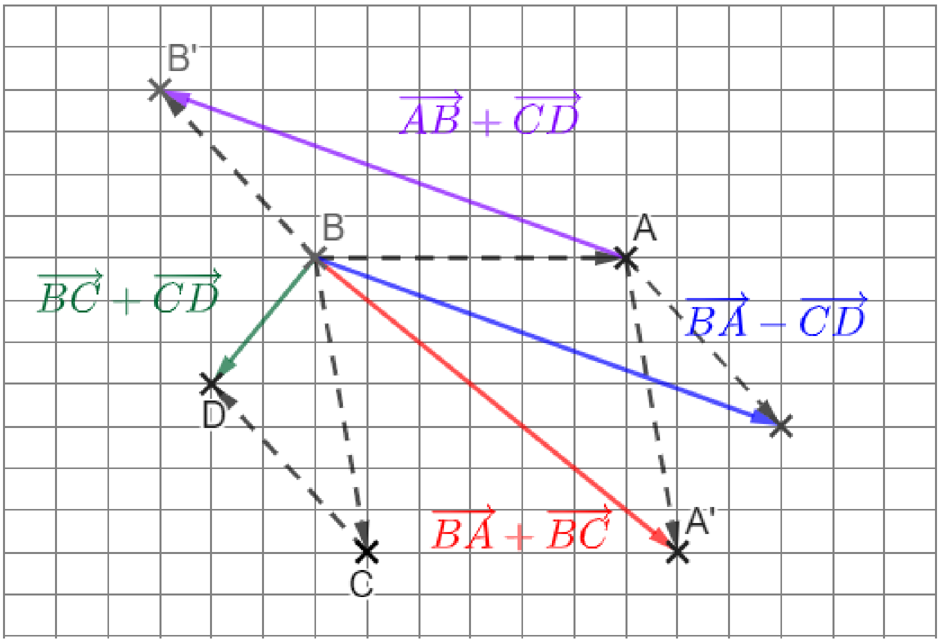
Construire un représentant de chacun des vecteurs suivants :

$\overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CD}$

$\overrightarrow{BA} + \overrightarrow{BC}$

$\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{CD}$

$\overrightarrow{BA} - \overrightarrow{CD}$



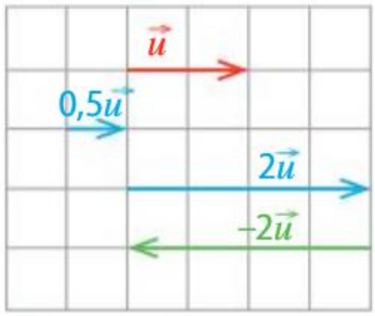
<u>III – Produit d'un vecteur par un réel :</u>

☐ **<u>Définition : Produit d'un réel k par un vecteur $\vec{u}$</u>**

Soit k un nombre réel non nul et $\vec{u}$ un vecteur non nul.

$\boldsymbol{k\vec{u}}$ est un vecteur défini par :

- Sa direction : $k\vec{u}$ et $\vec{u}$ ont la même direction ;
- Son sens : si $k > 0$, $k\vec{u}$ a le même sens que $\vec{u}$; si k<0 , $k\vec{u}$ et $\vec{u}$ sont de sens contraire. ;
- Sa norme : $\|k\vec{u}\| = |k| \times \|\vec{v}\|$



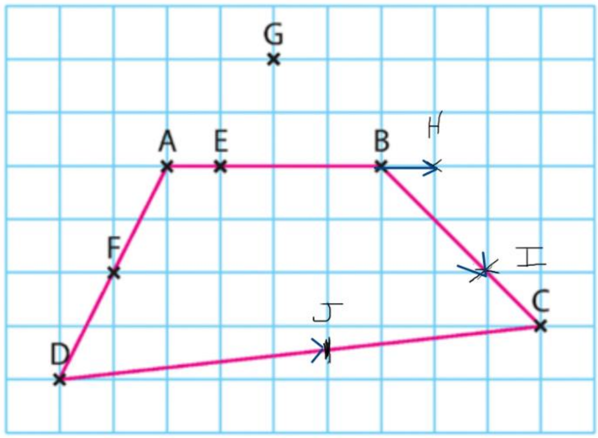
❖ <u>Exemples :</u>

Placer les points H, I et J tels que :

$\overrightarrow{AH} = \frac{5}{4}\overrightarrow{AB}$; $\overrightarrow{BI} = \frac{2}{3}\overrightarrow{BC}$; $\overrightarrow{DJ} = \frac{5}{9}\overrightarrow{DC}$;

Compléter :

$\overrightarrow{AE} = \frac{1}{4}\overrightarrow{AB}$ $\quad \overrightarrow{DF} = \frac{1}{2}\overrightarrow{DA}$ $\quad \overrightarrow{BG} = \frac{-2}{3}\overrightarrow{BC}$



☐ **<u>Règles de calcul</u>**

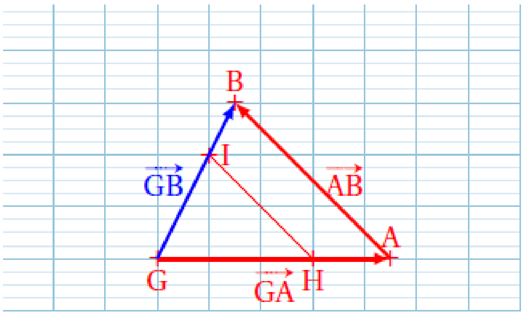
Soient $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs et k et k' deux nombres réels. Alors :

- $\boldsymbol{k(\vec{u} + \vec{v}) = k\vec{u} + k\vec{v}}$
- $\boldsymbol{(k + k')\vec{u} = k\vec{u} + k'\vec{u}}$
- $\boldsymbol{k\vec{u} = \vec{0} \Leftrightarrow k = 0 \text{ ou } \vec{u} = \vec{0}}$

❖ <u>Exemples :</u>

$3(\overrightarrow{AB} - 2\overrightarrow{EF}) = 3\overrightarrow{AB} - 6\overrightarrow{EF}$; $2\overrightarrow{AB} - 5\overrightarrow{AB} = -3\overrightarrow{AB}$; $-5(2\overrightarrow{AB}) = -10\overrightarrow{AB}$

❖ <u>Exercice :</u>



GHI est un triangle.

A et B sont les points tels que $\overrightarrow{GA} = \frac{3}{2}\,\overrightarrow{GH}$ et $\overrightarrow{AB} = \frac{3}{2}\,\overrightarrow{HI}$

1) Construire une figure en représentant le triangle et les points A et B.

2) Démontrer, à l'aide de la relation de Chasles, que $\overrightarrow{GB} = \frac{3}{2}\,\overrightarrow{GI}$.

D'après la relation de Chasles, $\overrightarrow{GB} = \overrightarrow{GA} + \overrightarrow{AB}$, on sait que $\overrightarrow{GA} = \frac{3}{2}\,\overrightarrow{GH}$ et $\overrightarrow{AB} = \frac{3}{2}\,\overrightarrow{HI}$

Donc par substitution, $\overrightarrow{GB} = \overrightarrow{GA} + \overrightarrow{AB} = \frac{3}{2}\,\overrightarrow{GH} + \frac{3}{2}\,\overrightarrow{HI}$

$= \frac{3}{2}\left(\overrightarrow{\mathbf{GH}} + \overrightarrow{\mathbf{HI}}\right) = \frac{3}{2}\,\overrightarrow{GI}$. (par mise en facteur puis d'après la relation de Chasles)

On a donc bien $\overrightarrow{GB} = \frac{3}{2}\,\overrightarrow{GI}$