I – Expressions algébriques :

a) Le vocabulaire du calcul algébrique :

Une **expression littérale** est un calcul contenant une ou plusieurs lettres qui désignent des nombres.

Elle peut servir à décrire une méthode de calcul , à calculer des aires, des volumes, des vitesses, convertir des unités, exprimer une fonction…

❖ Exemple : L'aire d'un disque

$A = \pi \times r^2$

Dans ce calcul, la lettre *r* représente le rayon du disque. La lettre π représente un nombre qui ne change pas.

❖ Principales formes rencontrées : On considère les expressions algébriques : $A = 2x + 5$ et $B = x - 1$

Somme	$A + B$	$(2x + 5) + (x - 1)$	Cube	A^3	$(2x + 5)^3$
Différence	$A - B$	$(2x + 5) - (x - 1)$	Inverse $A \neq 0$	$\frac{1}{A}$	$\frac{1}{(2x+5)}$ pour $x \neq -2{,}5$
Produit	$A \times B$	$(2x + 5)(x - 1)$	Quotient $B \neq 0$	$\frac{A}{B}$	$\frac{2x+5}{x-1}$ pour $x \neq 1$
Carré	A^2	$(2x + 5)^2$			

❖ Remarques :

$2x + 5$ est une **somme** car la dernière opération à effectuer est une somme

si $x = 3$ alors $2x + 5 = 2 \times 3 + 5 = 6 + 5 = 11$

Somme

$(2x + 5)(x - 1)$ est un **produit** car la dernière opération à effectuer est un produit

si $x = 3$ alors $(2x + 5)(x - 1) = (2 \times 3 + 5)(3 - 1) = 11 \times 2 = 22$

Produit

❖ Exemples :

- la somme du carré de x et de 5 est $x^2 + 5$
- le carré de la somme de x et de 5 est $(x + 5)^2$
- l'inverse de la somme de x et de 5 est $\frac{1}{x+5}$ pour $x \neq -5$
- l'opposé du double de x est $-2x$

b) Transformations d'expressions algébriques :

Une expression algébrique peut s'écrire de plusieurs façons et il faut savoir la transformer pour utiliser la forme la plus adaptée au travail à effectuer.

- **Exprimer une variable en fonction d'une autre**

☐ La masse volumique d'un corps est donné par : $\rho = \frac{m}{V}$ avec m (masse) et V (volume)

Exprimer m puis V en fonction des autres grandeurs.

$m = \rho \times V$ et $V = \frac{m}{\rho}$

☐ La loi d'Ohm est donné par : $U = R \times I$ avec U (tension) , R (Résistance) et I (intensité du courant)

Exprimer R puis I en fonction des autres grandeurs.

$R = \frac{U}{I}$ et $I = \frac{U}{R}$

☐ L'expérience de Galilée du haut de la tour de Pise, peut être modélisé par la relation $h = \frac{1}{2}gt^2$ avec g (gravité) , h (hauteur) et t (durée)

Exprimer t en fonction des autres grandeurs.

$h = \frac{1}{2}gt^2 \Leftrightarrow 2h = gt^2 \Leftrightarrow t^2 = \frac{2h}{g} \Leftrightarrow t = \sqrt{\frac{2h}{g}}$ car $t > 0$

- **Savoir DÉVELOPPER :**

Développer un produit, c'est transformer son écriture de **produit** en écriture de **somme**.

Exemple : Le produit $(2a + 3) \times (a - 7)$ peut s'écrire sous la forme $2a^2 - 11a - 21$.

Cela signifie que $(2a + 3) \times (a - 7)$ est toujours égal à $2a^2 - 11a - 21$ quelle que soit la valeur de a.

Remarques : Les différences sont considérées comme des sommes, le symbole × est souvent non écrit.

Développer en distribuant avec la simple ou la double distributivité

Quels que soient les réels, k, a, b, c et d, on a :

$$\boldsymbol{k}(a + b) = \boldsymbol{k}a + \boldsymbol{k}b \quad ou \quad (\boldsymbol{a} + \boldsymbol{b})(c + d) = \boldsymbol{a}c + \boldsymbol{a}d + \boldsymbol{b}c + \boldsymbol{b}d$$

Un conseil qui fait gagner du temps et évite des erreurs :

Chaque flèche correspond à une multiplication entre deux Signes, deux Nombres, deux Lettres.

$$(\ldots - 2x \ldots)(\ldots + 3x \ldots)$$

$$= \ldots\ldots - 6x^2 \ldots\ldots$$

S → $-$ par $+$ donne $-$

N → 2 par 3 donne 6

L → x par x donne x^2

Exercice d'application : Développer les expressions suivantes :

$A = 2(10x+3)$ $A = 20x+6$	$B = -6t(t-5)$ $B = -6t^2+30t$
$C = (5x+1)(x-3)$ $C = 5x^2-15x+x-3$ $C = 5x^2-14x-3$	$D = (3x-5)(x^2+2x-2)$ $D = 3x^3+6x^2-6x-5x^2-10x+10$ $D = 3x^3+x^2-16x+10$
$E = -2(5x+1)-(x-3)(x+4)$ $E = -10x-2-(x^2+4x-3x-12)$ $E = -10x-2-(x^2+x-12)$ $E = -10x-2-x^2-x+12$ $E = -x^2-11x+10$	$F = \left(\frac{x}{5}-\frac{7}{4}\right)\left(\frac{2}{3}-x\right)$ $F = \frac{2x}{15}-\frac{x^2}{5}-\frac{14}{12}+\frac{7x}{4} = -\frac{x^2}{5}+\frac{2x}{15}+\frac{7x}{4}-\frac{7}{6}$ $F = -\frac{x^2}{5}+\frac{8x}{60}+\frac{105x}{60}-\frac{7}{6} = -\frac{x^2}{5}+\frac{113x}{60}-\frac{7}{6}$

❖ **<u>Savoir FACTORISER :</u>**

Factoriser une somme, c'est transformer son écriture de **somme** en écriture de **produit**.

<u>Exemple :</u> Le somme $2a^2 + 8a$ peut s'écrire sous la forme $2a(a+4)$.

Cela signifie que $2a^2 + 8a$ est toujours égal à $2a(a+4)$ quelle que soit la valeur de a.

Factoriser par mise en facteur

- avec un **facteur commun** à deux termes $\boldsymbol{k}a + \boldsymbol{k}b = \boldsymbol{k}(a+b)$
- avec un **facteur commun** à trois termes $\boldsymbol{k}a + \boldsymbol{k}b + \boldsymbol{k}c = \boldsymbol{k}(a+b+c)$
- etc…

<u>Des conseils qui font gagner du temps et évitent des erreurs :</u>

- Pensez à <u>décomposer</u> pour découvrir le ou les facteurs communs parfois cachés.
  Par exemple, dans $6x^2 - 9x$ il faut décomposer pour obtenir $2 \times \mathbf{3} \times \boldsymbol{x} \times x - 3 \times \mathbf{3} \times \boldsymbol{x}$

- Une fois le <u>facteur commun mis devant</u> les parenthèses, on écrit dans les parenthèses ce qui reste
  $6x^2 - 9x = 2 \times \mathbf{3} \times \boldsymbol{x} \times x - 3 \times \mathbf{3} \times \boldsymbol{x} = \mathbf{3}\boldsymbol{x}(2x-3)$

- <u>Ne pas oublier un terme</u> !

Une erreur fréquente est de factoriser $3x^3 + 6x^2 + 3x$ par $3x\,(x^2 + 2x)$.
Vous aviez trois termes, il doit y en avoir trois dans les parenthèses, il ne faut pas oublier le 1.
On décompose : $3x^3 + 6x^2 + 3x = \mathbf{3}\boldsymbol{x} \times x^2 + \mathbf{3}\boldsymbol{x} \times 2x + \mathbf{3}\boldsymbol{x} \times 1 = 3x(x^2+2x+1)$

- N'ayez pas peur <u>des gros facteurs communs</u> !
  Ils ont le mérite de se voir de loin, comme dans $(7x + 2)(5 - 3x) - (7x + 2)(4x + 9)$.

Mais attention lors de la mise en facteur, gardez bien les parenthèses des termes en présence d'un – .

$(7x + 2)(5 - 3x) - (7x + 2)(4x + 9)$
$= (7x + 2)[(5 - 3x) - (4x + 9)]$
$= (7x + 2)(5 - 3x - 4x - 9)$
$= (7x + 2)(-7x - 4)$

☐ Factoriser les expressions suivantes :

$G = 3x + 21$ $I = 3x + 3 \times 7 = 3(x + 7)$	$H = 6x^2 - x$ $H = x \times 6x - x \times 1 = x(6x - 1)$
$I = (x + 3)(2x - 7) + (2x - 7)(-3x + 8)$ $I = (2x - 7)(x + 3 - 3x + 8)$ $I = (2x - 7)(-2x + 11)$	$J = (3x + 7)(2 - 3x) - (3x + 7)(-x - 4)$ $J = (3x + 7)[(2 - 3x) - (-x - 4)]$ $J = (3x + 7)(2 - 3x + x + 4)$ $J = (3x + 7)(6 - 2x)$

❖ **<u>Transformations d'expressions fractionnaires</u>**

Pour écrire la somme (ou a différence) de deux expressions fractionnaires sous forme d'un quotient, on les réduit au même dénominateur.

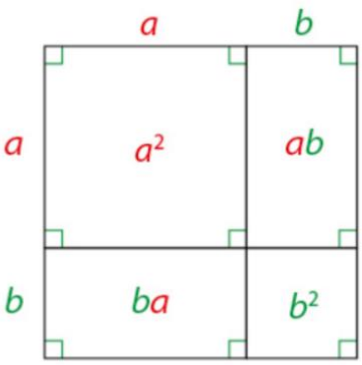
☐ <u>Exemple :</u> Ecrire chacune des expressions sous la forme d'un unique quotient

$\frac{x}{7} - \frac{2x}{5} = \frac{5x}{35} - \frac{14x}{35} = -\frac{9x}{35}$

; avec $x \neq 0$ $2x - \frac{3x-1}{5x} = \frac{10x^2}{5x} - \frac{3x-1}{5x} = \frac{10x^2-3x-1}{5x}$

II- Identités remarquables :

a) Propriété :



Pour tous nombres réels a et b on a :

$(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$ $\quad$ $(a - b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$

$(a + b)(a - b) = a^2 - b^2$

b) Démonstration :

Développer les produits suivants où a et b désignent des nombres réels :

$(a + b)^2 = (a + b)(a + b) = a^2 + ab + ba + b^2 = a^2 + 2ab + b^2$

$(a - b)^2 = (a - b)(a - b) = a^2 - ab - ba + b^2 = a^2 - 2ab + b^2$

$(a + b)(a - b) = a^2 - ab + ba - b^2 = a^2 - b^2$

c) Exemples :

☐ Développer les produits suivants :

$K=(x+6)^2$ $K=x^2+2\times x\times 6+6^2=x^2+12x+36$	$L=(5x-3)^2$ $L=(5x)^2-2\times(5x)\times 3+3^2=25x^2-30x+9$
$M=(3x-1)(3x+1)$ $M=(3x)^2-1^2=9x^2-1$	$N=(7-2x)^2+(7+2x)$ $N=49-28x+4x^2+7+2x$ $N=4x^2-26x+56$

☐ Factoriser les sommes suivantes :

$O=4x^2+20x+25$ $O=(2x)^2+2\times 2x\times 5+5^2=(2x+5)^2$	$P=x^2-2x+1$ $P=x^2-2x\times 1+1^2=(x-1)^2$
$Q=16x^2-9$ $Q=(3x)^2-1^2=9x^2-1$ $Q=(4x)^2-3^2=(4x-3)(4x+3)$	$R=-1+x^2$ $R=x^2-1=(x-1)(x+1)$
$S=(3x-1)^2-(x+2)^2$ $=\big((3x-1)-(x+2)\big)\big((3x-1)+(x+2)\big)=(3x-1-x-2)(4x+1)=(2x-3)(4x+1)$	