Mathématiques 2nd	<u>**Chapitre 4 :**</u> **Les nombres réels**	**Nombres et calculs**

On rappelle que l'ensemble des nombres entiers naturels $\{0; 1; 2; 3; 4; 5; 6; ...\}$ se note $\mathbb{N}$,
et que l'ensemble des nombres entiers relatifs $\{...; -6; -5; -4; -3; -2; -1; 0; 1; 2; 3; 4; 5; 6; ...\}$ se note $\mathbb{Z}$.

I – Les nombres rationnels :

a) Définition:

Un nombre **rationnel** est un nombre qui peut s'écrire sous la forme d'un quotient $\frac{a}{b}$ avec $a \in \mathbb{Z}$ et $b \in \mathbb{Z}^*$ $(* \; signifie \; \neq 0)$
L'ensemble des rationnels est noté $\mathbb{Q}$.

Tout nombre rationnel admet une écriture fractionnelle irréductible unique $\frac{p}{q}$, avec $p \in \mathbb{Z}$ et $q \in \mathbb{N}^*$, telle que le seul diviseur commun à p et q soit 1, on dit également que p et q sont premiers entre eux.

❖ **<u>Exemples :</u>** $\frac{1}{3} \in \mathbb{Q}$; $\frac{2{,}5}{0{,}7} \in \mathbb{Q}$ car $\frac{2{,}5}{0{,}7} = \frac{25}{7}$

En particulier, tout nombre entier ou entier relatif est aussi un nombre rationnel. Par exemple, $5 = \frac{5}{1}$, donc $5 \in \mathbb{Q}$.
On a donc $\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q}$.

b) Cas particulier : Les nombres décimaux :

❖ **<u>Définition et propriété caractéristique :</u>**

Un nombre **décimal** est un nombre rationnel qui peut s'écrire $\frac{a}{10^n}$ avec $a \in \mathbb{Z} \; et \; n \in \mathbb{N}$.
L'ensemble des nombres décimaux est noté $\mathbb{D}$.

Un nombre est décimal si, et seulement si, il peut s'écrire $\frac{a}{2^m \times 5^p}$ $a \in \mathbb{Z}$, $m \in \mathbb{N}$, $p \in \mathbb{N}$

❖ **<u>Exemples</u>** :

$3{,}45 = \frac{345}{100} = \frac{345}{10^2}$ est un décimal, on note : $3{,}45 \in \mathbb{D}$; $2{,}586974 = \frac{2586974}{10^6}$ donc $2{,}586974 \in \mathbb{D}$,

$\frac{1}{8} = \frac{1}{2^3 \times 5^0}$ donc $\frac{1}{8} \in \mathbb{D}$; $\frac{3}{20} = \frac{3}{2^2 \times 5^1}$ donc $\frac{3}{20}$ est un nombre décimal.

<u>Conséquences :</u> Les nombres entiers relatifs sont des décimaux ($a = \frac{a}{1}$ avec $a \in \mathbb{Z}$). Ainsi, $\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{D} \subset \mathbb{Q}$

❖ **Démonstration : Démontrons que $\frac{1}{3}$ n'est pas un nombre décimal**

Raisonnons par **l'absurde** et supposons que $\frac{1}{3}$ est décimal.

Alors $\frac{1}{3}$ peut s'écrire sous la forme $\frac{a}{10^n}$ avec $a \in \mathbb{Z} \; et \; n \in \mathbb{N}$.

Donc $\frac{1}{3} = \frac{a}{10^n}$ équivaut à $10^n = 3a$

$3a$ est un multiple de 3 donc 10^n doit être également un multiple de 3,

Or la somme des chiffres du nombre 10^n est égal à 1 qui n'est pas multiple de 3, donc 10^n n'est pas un multiple de 3

L'hypothèse de départ est donc absurde, on en conclut donc que $\frac{1}{3}$ n'est pas un nombre décimal.

II – Les nombres réels :

a) Définition:

Un nombre **réel** est un nombre qui peut s'écrire avec une partie entière et un nombre fini ou infini de décimales.
L'ensemble des nombres réels est noté $\mathbb{R}$.

❖ **Exemples** :

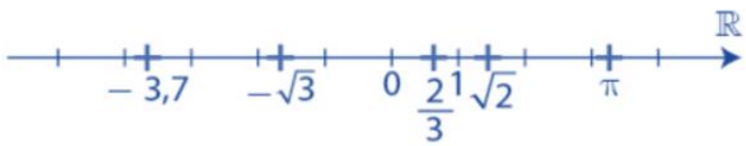
Les nombres réels permettent d'attribuer une mesure à toute grandeur.
$\sqrt{2} = 1{,}4142135623\ldots$ est la longueur de la diagonale d'un carré de côté 1
$\pi = 3{,}14415926535\ldots$ est la longueur d'un cercle de diamètre 1.

❖ **Notation :**

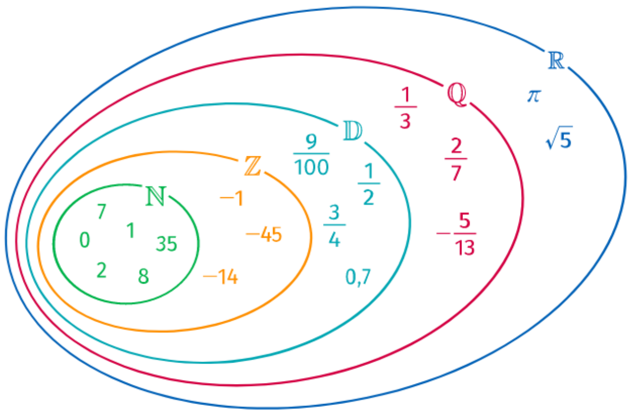
On note $\mathbb{R}^*$ ou $\mathbb{R} - \{0\}$ est l'ensemble des nombres réels différents de 0.
On note $\mathbb{R} - \{1; 2\}$ l'ensemble des nombres réels différents de 1 et 2.

b) Propriétés (admises):

À tout point d'une droite graduée (ou droite numérique) est associé un unique nombre réel, son abscisse.
Réciproquement, à tout nombre réel est associé un unique point d'une droite graduée (ou droite numérique).



Conséquences : Les nombres rationnels sont des nombres réels. En effet, leur écriture décimale a un nombre fini ou infini de décimales. Ainsi, $\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{D} \subset \mathbb{Q} \subset \mathbb{R}$
Les ensembles ci-dessus sont inclus les uns dans les autres « comme des poupées russes ».



Vocabulaire : Les nombres réels qui ne sont pas rationnels sont dits **nombres irrationnels**.

$\sqrt{2}$ et π sont des nombres irrationnels.

❖ **Démonstration : Démontrons que $\sqrt{2}$ n'est pas un nombre rationnel**

Raisonnons par **l'absurde** et supposons que $\sqrt{2}$ est un nombre rationnel,
Alors $\sqrt{2}$ peut s'écrire sous la forme $\frac{a}{b}$ avec *a* et *b* deux entiers naturels premiers entre eux avec *b* non nul.
Donc $\frac{a}{b} = \sqrt{2}$ est équivalent à $\left(\frac{a}{b}\right)^2 = \left(\sqrt{2}\right)^2 \Leftrightarrow \frac{a^2}{b^2} = 2 \Leftrightarrow a^2 = 2b^2$ On en déduit que a^2 est un multiple de 2.

Or, si *a* était impair, alors a^2 serait impair, ce qui implique que a est pair.

Puisque *a* est pair, il existe un entier naturel k tel que $a = 2k$ Comme, $a^2 = 2b^2$
On a : $(2k)^2 = 2b^2 \quad 4k^2 = 2b^2 \Leftrightarrow \quad b^2 = 2k^2$.

On en déduit que b^2 est également pair, ce qui implique que *b* est pair.

Or, *a* et *b* sont premiers entre eux, donc ils ne peuvent être pairs simultanément.

L'hypothèse de départ est donc absurde, On en conclut donc que $\sqrt{2}$ n'est pas un nombre rationnel, on dit qu'il est irrationnel et appartient à l'ensemble des nombres réels.

❖ **Exercices d'applications**

1) Compléter par le symbole $\in$ ou $\notin$ qui convient.

a) $-2{,}5$............ $\mathbb{D}$ b) $\sqrt{2}$ .... $\mathbb{R}$ c) $\sqrt{49}$ .... $\mathbb{Z}$

d) $7{,}141$ .... $\mathbb{Q}$ e) 2×10^{-3} .... $\mathbb{N}$ f) $\frac{15}{36}$ .... $\mathbb{D}$

2) Compléter le tableau en indiquant par une croix à quels ensembles le nombre appartient et en déduire la nature de chaque nombre.

	$\mathbb{N}$	$\mathbb{Z}$	$\mathbb{D}$	$\mathbb{Q}$	$\mathbb{R}$
$-\frac{3}{\sqrt{4}}$					
$\frac{18}{68}$					
$5-\sqrt{49}$					
$\pi - 3{,}14$					
$5{,}8 \times 10^3$					

3) Déterminer la nature de chaque nombre :

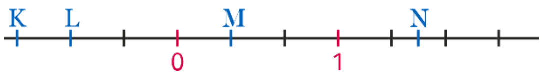
a) $\frac{7}{20}$ b) $\frac{96}{105}$ c) $\frac{-\sqrt{64}}{4}$ d) $1-\pi$

a) $\frac{7}{20} = \frac{7}{5\times4} = \frac{7}{5\times2^2}$ donc $\frac{7}{20} \in \mathbb{D}$, il est donc décimal ; b) $\frac{96}{105} = \frac{19}{21}$ donc $\frac{19}{21} \in \mathbb{Q}$, il est donc rationnel.

c) $\frac{-\sqrt{64}}{4} = \frac{-8}{4} = -2 \in \mathbb{Z}$, il est donc relatif ; d) $1-\pi \in \mathbb{R}$, il est donc réel.

2) a) Quelles sont les abscisses des points placés sur la droite numérique ci-dessous ?

b) Placer les nombres P et Q d'abscisses respectives $\sqrt{2}$ et $\frac{5}{4}$



a) K(-1) ; L $(\frac{-2}{3})$; M $(\frac{1}{3})$; N $(\frac{3}{2})$

c) Méthode d'encadrement d'un nombre réel par des nombres décimaux :

Définitions :

Un encadrement décimal d'un nombre réel x est une écriture de la forme :

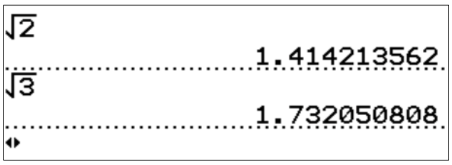
$d_1 \leq x \leq d_2$ avec d_1 et d_2 deux nombres décimaux.

La différence $d_2 - d_1$ est l'amplitude de l'encadrement

Pour tout nombre réel x, il existe un nombre décimal d et un entier naturel n tels que $d_1 \leq x \leq d_2$ où $d_1$et d_2 sont des nombres décimaux à n chiffres après la virgule, avec $d_1 - d_2 = 10^{-n}$

L'arrondi à 10^{-n} de x est celui de $d_1$et d_2 qui est le plus proche de x . Dans le cas où $d_1$et d_2 sont à égale distance de x, l'arrondi à 10^{-n} de x est d_2.

❖ **Exemples :**



1) Une calculatrice affiche les valeurs approchées des nombres $\sqrt{2}$ et $\sqrt{3}$.
a) Donner un encadrement à 10^{-1} près de $\sqrt{2}$.
b) Donner un encadrement à 10^{-3} près de $\sqrt{3}$.

a) L'encadrement à 10^{-1} près de $\sqrt{2}$ est $1{,}4 < \sqrt{2} < 1{,}5$
b) L'encadrement à 10^{-3} près de $\sqrt{3}$ est $1{,}732 < \sqrt{2} < 1{,}733$

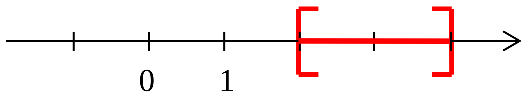
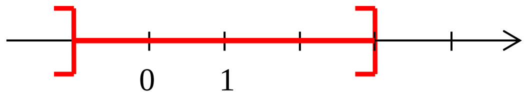
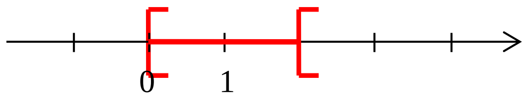
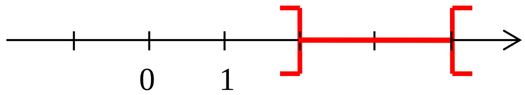
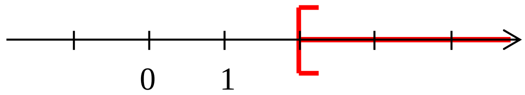
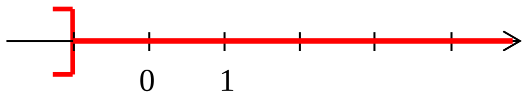
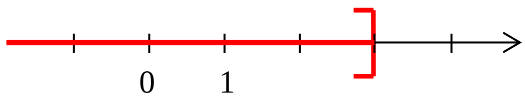
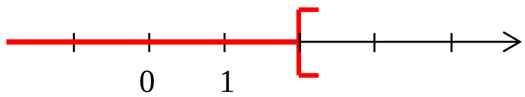
2) Donner l'arrondi du nombre π à 10^{-2} , 10^{-3} .

3,14 est l'arrondi à 10^{-2} (au centième) de π .

3,142 est l'arrondi à 10^{-3} (au millième) de π .

III – Les intervalles :

a) Sur des exemples:

Ensemble des réels x tels que	Intervalle	Représentation graphique
$2 \leq x \leq 4$	[2 ; 4]	
$-1 < x \leq 3$	]–1 ; 3]	
$0 \leq x < 2$	[0 ; 2[	
$2 < x < 4$	]2 ; 4[	
$x \geq 2$	[2 ; +∞[∞ désigne l'infini	
$x > -1$	]–1 ; +∞[	
$x \leq 3$	]–∞ ; 3]	
$x < 2$	]–∞ ; 2[	

[2 ; 4] se lit intervalle fermé 2 ; 4 ;]2 ; 4[se lit intervalle ouvert 2 ; 4

[0 ; 2[se lit intervalle fermé en 0 et ouvert en 2 ;]–∞ ; 3] se lit intervalle -∞ ; 3 fermé en 3

<u>Remarque :</u> L'ensemble des nombres réels ℝ est un intervalle qui peut se noter]–∞ ; +∞[.

b) Définition:

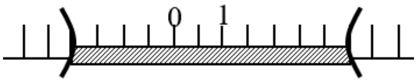
On appelle **Intervalle** l'ensemble des nombres réels compris entre deux **bornes.**

❖ **Notation :**

Un intervalle est un « morceau de la droite graduée » qui peut être représenté à l'aide de crochets, **ouverts (vers l'extérieur) ou fermés (vers l'intérieur).**

Par convention, un **crochet ouvert** de l'intervalle indique que la borne ne fait pas partie de l'intervalle, et un **crochet fermé** indique que la borne fait partie de l'intervalle

❖ **Exemple :**

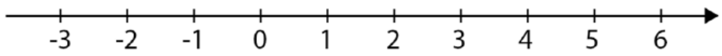
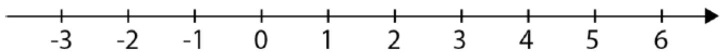
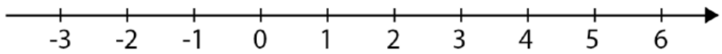


La partie hachurée est l'intervalle $]-2\,;3{,}5\,[$

Il contient tous les nombres compris strictement entre -2 et $3{,}5$, c'est-à-dire les nombres x tels que $-2 < x < 3{,}5$.

❖ **Exercices d'applications :**

1) Compléter le tableau

Inégalité	Intervalle	Représentation graphique
$-2 < x \leq 3$		
	$]0;5[$	
	$]-\infty;-1]$	
$x > \frac{5}{2}$		

2) Compléter par le symbole $\in$ ou $\notin$ qui convient.

a) $-1\ldots\ldots[-10;0]$ **b)** $0{,}5\ldots\ldots]0;+\infty[$ **c)** $-2\ldots\ldots[-1{,}9;4[$

d) $10^{-5}\ldots\ldots]0;+\infty[$ **e)** $2{,}5\times10^{4}\ldots\ldots]-\infty;3]$ **f)** $-0{,}8\ldots\ldots]-0{,}8;2]$

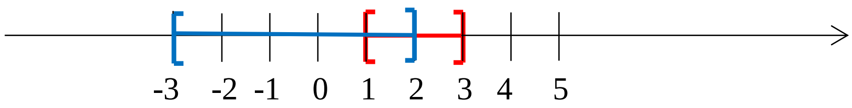
c) Intersection et réunion de deux intervalles

Définition : Soient I et J deux intervalles. - **L'intersection** de I et J est l'ensemble des réels qui appartiennent à la fois à I et à J, on le note **I ∩ J.** - **La réunion** de I et J est l'ensemble des réels qui appartiennent à I ou à J, on le note **I ∪ J.**

❖ **Exemples :**

A l'aide d'une droite graduée, déterminer l'intersection et la réunion des intervalles I et J dans les cas suivants :

a) Si I = $[1;3]$ et J = $[-3;2\,]$ alors I ∩ J = $[\,1;2\,]$ et I ∪ J = $[-3;3\,]$



b) Si I = $[-2;5]$ et J = $]-\infty;1]$ alors I ∩ J = $[-2;1\,]$ et I ∪ J = $]-\infty;5]$