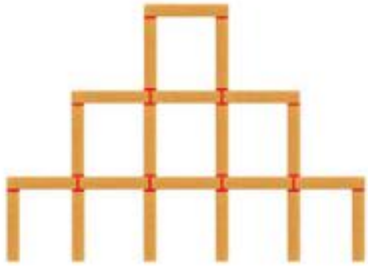
Activité 1 p 19

1 Évolutions successives à accroissements constants

Timeo joue avec un tas de bâtonnets identiques. Il a commencé la construction ci-contre, il a disposé 3 bâtonnets sur la 1re rangée, 7 sur la 2e et ainsi de suite.



1 Recopier et compléter le tableau suivant :

Rangée	1	2	3	4	5
Nombre de bâtonnets sur la rangée	3	7			

2 On note n le numéro d'une rangée, u_n (lire « u indice n ») le nombre de bâtonnets sur la rangée n et u_{n+1} le nombre de bâtonnets sur la rangée $n+1$.

a) Lorsqu'on connaît le nombre u_n, comment obtient-on rapidement le nombre u_{n+1} ?

On dit que la suite (u_n) est une **suite arithmétique de raison 4**.

b) Pour tout nombre n de $\mathbb{N}$, exprimer u_{n+1} en fonction de u_n. Il s'agit d'une **relation de récurrence**.

c) D'après cette relation, comment pourrait-on connaître la valeur de u_{100} ?

3 **a)** Recopier et compléter le tableau ci-contre.

Conjecturer une formule explicite de u_n en fonction de n.

b) En admettant la conjecture précédente, combien Timeo devrait-il mettre de bâtonnets sur la 8e rangée ?

n	1	2	3	4	5
$4n$					
u_n	3	7			

1

Rangée	1	2	3	4	5
Nombre de bâtonnets sur la rangée	3	7	11	15	19

2 **a)** Pour obtenir u_{n+1}, on ajoute 4 à u_n.
En effet, à la $(n+1)$-ième rangée, on a le même nombre de bâtonnets qu'à la n-ième rangée plus 2 bâtonnets de chaque côté.

b) Pour tout nombre n de $\mathbb{N}$, $u_{n+1} = u_n + 4$.

c) Pour calculer u_{100}, il faudrait connaître u_{99}, donc u_{98}, u_{97}, ...

3 **a)**

n	1	2	3	4	5
$4n$	4	8	12	16	20
u_n	3	7	11	15	19

Il semble que pour tout nombre n de $\mathbb{N}$ avec $n \geqslant 1$, $u_n = 4n - 1$.

b) $u_8 = 4 \times 8 - 1 = 32 - 1 = 31$.

Les capacités travaillées dans ce chapitre	Exercices
• Calculer un terme d'une suite (formule explicite, relation de récurrence, ...).	1 à 7, 19 à 34
• Calculer un terme ou la raison d'une suite arithmétique.	8, 10, 11, 35, 37 à 48, 51
• Calculer une somme de termes consécutifs d'une suite arithmétique.	14, 16, 52 à 60
• Calculer un terme ou la raison d'une suite géométrique.	9, 12, 13, 61, 63 à 73, 76
• Calculer une somme de termes consécutifs d'une suite géométrique.	15, 17, 18, 77 à 83
• Représenter graphiquement une suite arithmétique ou géométrique.	49, 50, 74, 75
• Reconnaître ou démontrer qu'une suite est arithmétique.	36, 98, 107 à 110
• Reconnaître ou démontrer qu'une suite est géométrique.	62, 99, 112, 114 à 116

Capacité 1

Calculer un terme d'une suite à l'aide de la formule explicite, de la relation de récurrence, …

Exercices résolus 1 et 2 p 23 puis faire 5 ; 6 et 7 p 23

Exercice résolu 1 :

(u_n) est la suite définie pour tout nombre n de $\mathbb{N}$ par $u_n = 3n^2 - 5$.
Calculer u_4.

Solution

$u_4 = 3 \times 4^2 - 5$
$u_4 = 3 \times 16 - 5$
$u_4 = 48 - 5$
$u_4 = 43$

Pour calculer u_4, on remplace n par 4 dans $3n^2 - 5$.
On effectue ensuite le calcul en respectant les priorités opératoires (carré puis multiplication et enfin soustraction).

Exercice résolu 2 :

(v_n) est la suite définie par $v_0 = 4$ et pour tout nombre n de $\mathbb{N}$, $v_{n+1} = -2v_n + 1$.

a) Calculer v_1. **b)** Calculer v_3.

Solution

a) $v_1 = -2v_0 + 1$
$v_1 = -2 \times 4 + 1$
$v_1 = -8 + 1$
$v_1 = -7$

Pour calculer v_1, on l'exprime en fonction du terme précédent, à savoir v_0, avec la formule de récurrence.

b) Avec la formule de récurrence, v_3 s'exprime en fonction du terme précédent v_2 et v_2 s'exprime en fonction de v_1. Or, on connaît v_1, donc on peut calculer v_2 puis v_3.

$v_2 = -2v_1 + 1$	$v_3 = -2v_2 + 1$
$v_2 = -2 \times (-7) + 1$	$v_3 = -2 \times 15 + 1$
$v_2 = 14 + 1$	$v_3 = -30 + 1$
$v_2 = 15$	$v_3 = -29$

Pour calculer un terme d'une suite définie par récurrence, il suffit de calculer tous les termes précédents.

5 (t_n) est la suite définie pour tout nombre n de $\mathbb{N}$ par $t_n = 3n^2 - 33n + 72$. Comparer t_3 et t_8.

6 (k_n) est la suite définie par $k_0 = -5$ et pour tout nombre n de $\mathbb{N}$, $k_{n+1} = 5k_n - 7$.

a) Calculer k_1. **b)** Calculer k_3.

7 (z_n) est la suite définie par $z_0 = 2$ et pour tout nombre n de $\mathbb{N}$, $z_{n+1} = z_n^2$.

Recopier et compléter le tableau ci-dessous.

n	0	1	2	3	4
z_n	2				

5 • $t_3 = 3 \times 3^2 - 33 \times 3 + 72 = 27 - 99 + 72 = 0$

• $t_8 = 3 \times 8^2 - 33 \times 8 + 72 = 192 - 264 + 72 = 0$

Ainsi, $t_3 = t_8$.

6 **a)** $k_1 = 5k_0 - 7 = 5 \times (-5) - 7$

$k_1 = -25 - 7 = -32$

b) $k_2 = 5k_1 - 7 = 5(-32) - 7 = -167$

$k_3 = 5k_2 - 7 = 5(-167) - 7 = -842$

7

n	0	1	2	3	4
z_n	2	4	16	256	65 536

Exercice 28 à 31 p 26

28 (u_n) est la suite définie pour tout nombre n de $\mathbb{N}$ par $u_n = n^2 + 1$.

a) Calculer u_0, u_1, u_2, u_3.

b) Dans un repère orthonormé, représenter graphiquement ces quatre premiers termes de la suite (u_n).

c) Pour quelle valeur de n a-t-on $u_n = 50$?

29 (u_n) est la suite définie pour tout nombre n de $\mathbb{N}$ par :

$$u_n = -2n^2 + n - 3$$

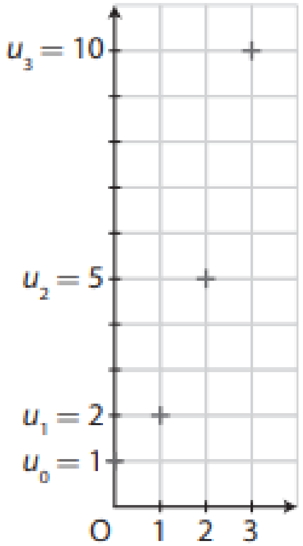
À l'écran de la calculatrice :

a) tabuler la suite (u_n) ;

b) représenter graphiquement les dix premiers termes de la suite (u_n) en choisissant une fenêtre adaptée.

28 **a)** • $u_0 = 1$ • $u_1 = 2$ • $u_2 = 5$ • $u_3 = 10$

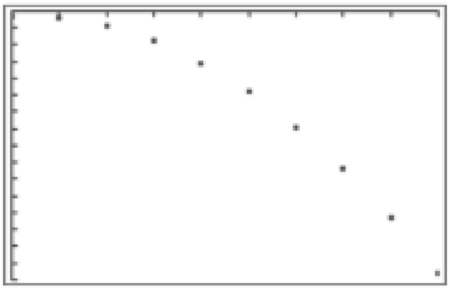
b)



c) $u_n = 50$ équivaut à $n^2 + 1 = 50$ c'est-à-dire $n^2 = 49$ soit $n = 7$ ou $n = -7$.
Or, $n \in \mathbb{N}$, donc $u_n = 50$ pour $n = 7$.

29

n	u(n)
0	-3
1	-4
2	-9
3	-18
4	-31
5	-48
6	-69
7	-94
8	-123
9	-156
10	-193



(*fenêtre :* $0 \leqslant X \leqslant 11$, pas 1 et $-160 \leqslant Y \leqslant 0$, pas 10)

30 Algo Voici une fonction U en langage Python.

```
def U(n):
    u=4
    for i in range(1,n+1):
        u=u**2-2*u
    return u
```

a) Définir par récurrence la suite (u_n) dont cette fonction permet de calculer les termes.

b) Calculer u_1, u_2, u_3.

c) Saisir cette fonction et l'exécuter pour déterminer u_6.

31 Algo (v_n) est la suite définie par $v_0 = 2$ et pour tout nombre n de $\mathbb{N}$, $v_{n+1} = -\frac{1}{2}v_n + 1$.

a) Calculer v_1, v_2, v_3.

b) Écrire un algorithme qui calcule et affiche les termes de cette suite.

c) Coder cet algorithme en langage Python.

Saisir ce programme et l'exécuter pour déterminer v_{10}.

Arrondir au millième.

30 **a)** $u_0 = 4$ et pour tout nombre n de $\mathbb{N}$, $u_{n+1} = u_n^2 - 2u_n$.

b) $u_1 = u_0^2 - 2u_n = 4^2 - 2 \times 4 = 16 - 8 = 8$

$u_2 = u_1^2 - 2u_1 = 8^2 - 2 \times 8 = 48$

$u_3 = u_2^2 - 2u_2 = 48^2 - 2 \times 48 = 2\,208$

c) Voici la valeur de u_6 affichée dans la console :

```
>>>
U = 562882766124611619513723648
```

Remarque : la calculatrice affiche :

$$u_6 \approx 5{,}628\,827\,661 \times 10^{26}$$

31 **a)** $v_1 = -\frac{1}{2}v_0 + 1 = -\frac{1}{2} \times 2 + 1 = 0$

$v_2 = -\frac{1}{2}v_1 + 1 = -\frac{1}{2} \times 0 + 1 = 1$

$v_3 = -\frac{1}{2}v_2 + 1 = -\frac{1}{2} \times 1 + 1 = \frac{1}{2}$

b)

```
V ← 2
Pour i allant de 1 à n
    V ← −0,5V + 1
Fin Pour
```

c)

```
n=int(input("Entrer n ="))
V=2
for i in range(1,n+1):
    V=-0.5*V+1
print("V =",V)
```

Voici la valeur de v_{10} affichée dans la console :

```
>>>
V = 0.66796875
```

Ainsi, $v_{10} \approx 0{,}668$.

Exercice 101 et 103 p 34

101 (v_n) est la suite définie sur $\mathbb{N}$ par :

$$v_n = n^2 + 2n - 3$$

a) Déterminer une fonction f définie sur $[0\,;+\infty[$ telle que, pour tout nombre n de $\mathbb{N}$, $v_n = f(n)$.

b) Dans chaque cas, le point donné dans un repère appartient-il à la courbe représentative de f ? à la représentation graphique de (v_n)?

$A(2;5)$	$B(5;32)$	$C(51;270)$
$D(70;3\,710)$	$E(-10;77)$	$F(4{,}6;27{,}36)$

101 **a)** f est la fonction définie sur $[0\,;+\infty[$ par $f(x) = x^2 + 2x - 3$.

b) A et B appartiennent à la courbe de f et à la représentation graphique de (v_n).

C et D n'appartiennent pas à la courbe de f, donc non plus à la représentation graphique de (v_n).
E et F appartiennent à la courbe de f mais pas à la représentation graphique de (v_n) (-10 et 4,6 ne sont pas des nombres entiers naturels).

103 Algo Les lignes 1 à 6 de ce programme en langage Python définissent la fonction **`Factorielle`**.
L'image d'un nombre n de $\mathbb{N}$ par cette fonction est notée $\boldsymbol{n!}$ (« factorielle n »).

```
1 def Factorielle(n):
2     if n<2:
3         r=1
4     else:
5         r=n*Factorielle(n-1)
6     return r
7
8 n=int(input("Entrer n="))
9 for i in range(0,n+1):
10     print(i,"!=",Factorielle(i))
```

a) Saisir ce programme et l'exécuter avec $n = 5$.
Recopier et compléter : • $0! = \ldots$ • $1! = \ldots$ • $2! = \ldots$ • $3! = \ldots$ • $4! = \ldots$ • $5! = \ldots$

b) (u_n) est la suite définie pour tout nombre n de $\mathbb{N}$ par $u_n = n!$. Définir cette suite (u_n) en utilisant une relation de récurrence.

c) Recopier et compléter la phrase : « Pour $n \geqslant 1$, $n!$ est le … des nombres entiers naturels de 1 à … ».

103 **a)** On exécute Factorielle (5) et on obtient :

```
>>>
0 ! = 1
1 ! = 1
2 ! = 2
3 ! = 6
4 ! = 24
5 ! = 120
```

b) La ligne 5 du programme indique que pour tout nombre n de $\mathbb{N}$ avec $n \geqslant 1$,

$$\text{Factorielle}(n) = n \times \text{Factorielle}(n-1)$$

c'est-à-dire $u_n = n \times u_{n-1}$.

Ainsi, (u_n) est la suite définie par $u_0 = 1$ et pour tout nombre n de $\mathbb{N}$, $u_{n+1} = (n+1)u_n$.

c) Pour $n \geqslant 1$, $n!$ est le **produit** des nombres entiers naturels de 1 à $\boldsymbol{n}$.

En effet,

$u_n = n\,u_{n-1} = n(n-1)u_{n-2} = n(n-1)(n-2)u_{n-3}$

et de proche en proche :

$$u_n = n(n-1)(n-2)\ldots \times 2 \times 1$$

Donc pour tout $n \geqslant 1$, $n! = n(n-1)\ldots \times 2 \times 1$.

Remarque : le fait que $0! = 1$ est une convention.

Cours : III Suites arithmétiques

Exercice résolu 8 p 24

(u_n) est la suite arithmétique de raison 3 telle que $u_1 = -5$.

a) Calculer u_{20}.

b) Pour tout nombre n de $\mathbb{N}$, exprimer u_n explicitement en fonction de n.

Solution

a) $u_{20} = u_1 + (20-1)r$

$u_{20} = -5 + (20-1) \times 3$

$u_{20} = -5 + 19 \times 3$

$u_{20} = -5 + 57$

$u_{20} = 52$

b) Pour tout n de $\mathbb{N}$, $u_n = u_1 + (n-1)r$, c'est-à-dire :

$u_n = -5 + 3(n-1)$

$u_n = -5 + 3n - 3$

$u_n = 3n - 8$

Pour calculer un terme d'une suite arithmétique, on utilise la formule explicite $\boldsymbol{u_n = u_p + (n-p)r}$.
Pour effectuer le calcul, on veille à respecter les priorités opératoires : calculs dans la parenthèse puis on effectue la multiplication.

Exercice 11 p 24

11 (k_n) est la suite arithmétique de raison 0,5 telle que $k_5 = -50$. Calculer k_{100}.

11 $k_{100} = k_5 + (100-5)r = -50 + 95 \times 0{,}5 = -2{,}5$

→ Cours 2. A et B

Questions flash

35 (u_n) est la suite arithmétique de raison 6 telle que $u_1 = 4$.

Laquelle de ces affirmations est exacte ?

(1) Pour calculer u_0, on divise 4 par 6.

(2) Pour calculer u_0, on soustrait 4 à 6.

(3) Pour calculer u_0, on retranche 6 à 4.

36 Dans chaque cas, dire si les nombres peuvent être des termes consécutifs d'une suite arithmétique. Expliquer.

a) $-1; 2; 5; 8; 11$ **b)** $2; 4; 8; 16; 32$

c) $-10; -8; 0; 2; 4$ **d)** $7; 3; -1; -5; -9$

37 (v_n) est la suite arithmétique de raison 2,5 telle que $v_0 = 0{,}5$.

Calculer mentalement v_1, v_2, v_3, v_4.

38 (w_n) est la suite arithmétique de raison -10 telle que $w_0 = 0$.

Calculer mentalement w_1, w_2, w_3, w_4.

39 (t_n) est la suite arithmétique telle que $t_4 = 8$ et $t_5 = 20$.

Quelle est sa raison ?

40 (h_n) est la suite arithmétique telle que $h_4 = 8$ et $h_6 = 0$.

Quelle est sa raison ?

35 $u_1 = u_0 + 6$ soit $u_0 = u_1 - 6 = 4 - 6$.
L'affirmation **(3)** est exacte.

36 **a)** Oui : $2 - (-1) = 5 - 2 = 8 - 5 = 11 - 8 = 3$
b) Non : $4 - 2 = 2$ mais $8 - 4 = 4$.
c) Non : $-8 - (-10) = 2$ mais $0 - (-8) = 8$.
d) Oui :
$3 - 7 = -1 - 3 = -5 - (-1) = -9 - (-5) = -4$

37 • $v_1 = 3$ • $v_2 = 5{,}5$ • $v_3 = 8$ • $v_4 = 10{,}5$

38 • $w_1 = -10$ • $w_2 = -20$ • $w_3 = -30$ • $w_4 = -40$

39 $t_5 - t_4 = 20 - 8 = 12$
Donc la suite arithmétique (t_n) a pour raison 12.

40 $h_6 = h_4 + (6 - 4)r$
$0 = 8 + 2r$ c'est-à-dire $r = -4$.
Donc la suite arithmétique (h_n) a pour raison -4.

<u>Exercices 43 à 48 p 27</u>

Pour les exercices 43 à 47, (u_n) est une suite arithmétique de raison r.

43 $u_0 = 1$ et $r = -10$. Calculer u_8.

44 $u_2 = 3$ et $r = 0{,}2$. Calculer u_{50}.

45 $u_2 = -4$ et $u_3 = 5$. Calculer r puis u_0.

46 $u_6 = 4$ et $u_8 = 12$. Calculer r puis u_5.

47 $u_2 = 7$ et $u_{10} = 1$. Calculer r puis u_0.

48 (b_n) est la suite arithmétique de raison $-\frac{1}{2}$ telle que $b_1 = \frac{3}{4}$.

Pour tout nombre n de $\mathbb{N}$, exprimer b_n en fonction de n. *Réduire l'expression.*

43 $u_8 = u_0 + 8r = 1 + 8 \times (-10) = -79$

44 $u_{50} = u_2 + (50 - 2)r$

$u_{50} = 3 + 48 \times 0{,}2 = 12{,}6$

45 • $u_3 = u_2 + r$ donc $r = u_3 - u_2$

soit $r = 5 - (-4) = 9$.

• $u_0 = u_2 + (0 - 2)r = -4 - 2 \times 9 = -22$

46 • $u_8 = u_6 + 2r$ soit $12 = 4 + 2r$

c'est-à-dire $2r = 8$. Ainsi, $r = 4$.

• $u_5 = u_6 + (5 - 6)r = 4 - 4 = 0$

47 • $u_{10} = u_2 + (10 - 2)r$ soit $1 = 7 + 8r$

c'est-à-dire $8r = -6$. Ainsi, $r = -\dfrac{3}{4}$.

• $u_0 = u_2 + (0 - 2)r = 7 - 2 \times \left(-\dfrac{3}{4}\right) = \dfrac{17}{2}$

48 Pour tout nombre n de $\mathbb{N}$,

$b_n = b_1 + (n - 1)r$

$b_n = \dfrac{3}{4} - \dfrac{1}{2}(n - 1) = -\dfrac{1}{2}n + \dfrac{5}{4}$

Exercices 107 à 109 p 35

107 (u_n) est la suite arithmétique de raison 6 telle que $u_0 = 7$.

(v_n) est la suite définie pour tout nombre n de $\mathbb{N}$, par $v_n = 5u_n - 1$.

Démontrer que la suite (v_n) est arithmétique.

108 (u_n) est la suite de nombres réels strictement positifs définie par $u_0 = 2$ et pour tout nombre n de $\mathbb{N}$,

$$u_{n+1} = \frac{u_n}{u_n + 1}$$

(v_n) est la suite définie sur $\mathbb{N}$ par $v_n = \frac{1}{u_n}$.

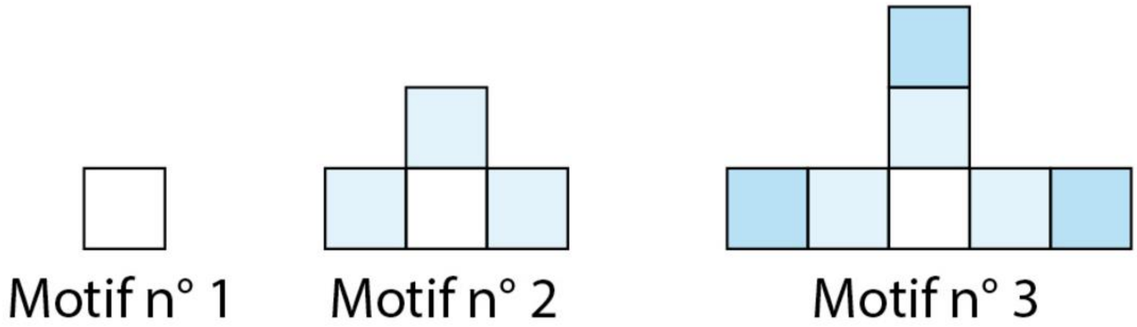
a) Calculer u_1, u_2, u_3, u_4, puis v_1, v_2, v_3, v_4.

b) Démontrer que (v_n) est une suite arithmétique.

c) Pour tout nombre n de $\mathbb{N}$, exprimer :

- v_n en fonction de n ;
- u_n en fonction de n.

109 On construit une suite de motifs. La figure ci-dessous montre les trois premiers.



Pour tout nombre $n \geqslant 1$ de $\mathbb{N}$, on note C_n le nombre de carrés du motif numéro n.

a) Justifier que la suite (C_n) est arithmétique.
Quelle est sa raison ?

b) Calculer le nombre de carrés du motif n° 1 000.

107 Pour tout nombre n de $\mathbb{N}$,

$v_{n+1} - v_n = 5u_{n+1} - 1 - (5u_n - 1)$

$v_{n+1} - v_n = 5(u_{n+1} - u_n)$.

(u_n) est une suite arithmétique de raison 6, donc

$v_{n+1} - v_n = 5 \times 6$

$v_{n+1} - v_n = 30$

Ainsi, (v_n) est une suite arithmétique de raison 30.

108 **a)** • $u_1 = \dfrac{u_0}{u_0 + 1} = \dfrac{2}{2+1} = \dfrac{2}{3}$

$$u_2 = \frac{u_1}{u_1 + 1} = \frac{\frac{2}{3}}{\frac{2}{3} + 1} = \frac{2}{3} \times \frac{3}{5} = \frac{2}{5}$$

$$u_3 = \frac{u_2}{u_2 + 1} = \frac{\frac{2}{5}}{\frac{2}{5} + 1} = \frac{2}{5} \times \frac{5}{7} = \frac{2}{7}$$

$$u_4 = \frac{u_3}{u_3 + 1} = \frac{\frac{2}{7}}{\frac{2}{7} + 1} = \frac{2}{7} \times \frac{7}{9} = \frac{2}{9}$$

• $v_1 = \dfrac{1}{u_1} = \dfrac{3}{2}$ • $v_2 = \dfrac{1}{u_2} = \dfrac{5}{2}$

• $v_3 = \dfrac{1}{u_3} = \dfrac{7}{2}$ • $v_4 = \dfrac{1}{u_4} = \dfrac{9}{2}$

b) Pour tout nombre n de $\mathbb{N}$,

$$v_{n+1} - v_n = \frac{1}{u_{n+1}} - \frac{1}{u_n}$$

$$v_{n+1} - v_n = \frac{u_n + 1}{u_n} - \frac{1}{u_n}$$

$$v_{n+1} - v_n = \frac{u_n}{u_n} = 1$$

Donc, (v_n) est une suite arithmétique de raison 1.

c) • Pour tout nombre n de $\mathbb{N}$,

$$v_n = v_0 + n \times 1 = v_0 + n$$

Or, $v_0 = \frac{1}{u_0} = \frac{1}{2}$, donc pour tout nombre n de $\mathbb{N}$,

$$v_n = \frac{1}{2} + n.$$

• Pour tout nombre n de $\mathbb{N}$,

$$u_n = \frac{1}{v_n} = \frac{1}{n + \frac{1}{2}} = \frac{1}{\frac{2n+1}{2}} = \frac{2}{2n+1}$$

109 **a)** On passe du motif n° n au motif n° $(n+1)$ en ajoutant 3 carrés. Ainsi, pour tout nombre n de $\mathbb{N}$,

$$C_{n+1} - C_n = 3.$$

Donc la suite (C_n) est arithmétique de raison 3.

b) Pour tout nombre n de $\mathbb{N}$,

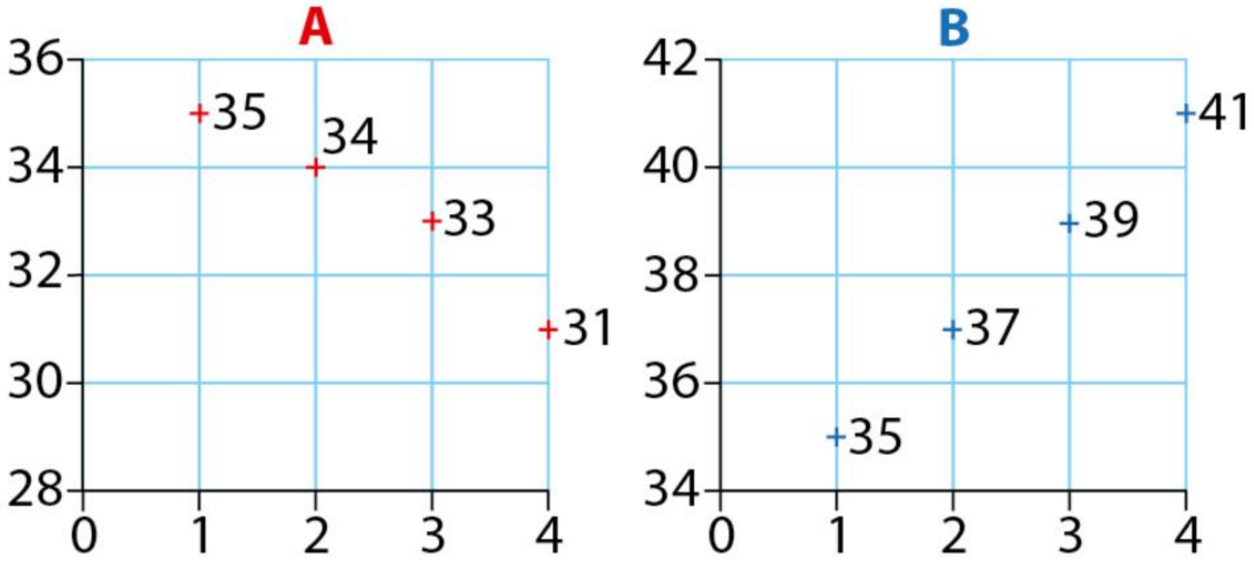
$$C_n = C_1 + 3(n+1) = 1 + 3(n-1)$$

c'est-à-dire $C_n = 3n - 2$.

Donc, $C_{1000} = 3 \times 1000 - 2 = 2\,998$.

Exercice 41 p 27

41 Ces graphiques représentent les chiffres d'affaires a_n et b_n, en milliers d'euros, de deux succursales A et B d'une chaîne, pendant quatre mois.



Dans chaque cas, préciser s'il est possible de modéliser les chiffres d'affaires par une suite arithmétique.
Si oui, et si l'évolution se poursuit ainsi, exprimer le terme général en fonction de n.

41 • Succursale A :

$34-35=33-34=-1$ mais $31-33=-2$.

On ne peut pas modéliser le chiffre d'affaires de A avec une suite arithmétique.

• Succursale B :

$37-35=39-37=41-39=2$.

On peut modéliser le chiffre d'affaires de B durant ces 4 mois avec une suite arithmétique de raison 2.
Si l'évolution se poursuit ainsi, le chiffre d'affaires de B, le mois n (avec $n \in \mathbb{N}$, $n \geqslant 1$), sera $35+2(n-1)$ c'est-à-dire $33+2n$.

49 (a_n) est la suite arithmétique de raison -2 telle que $a_0 = 7$.

a) Pour tout nombre n de $\mathbb{N}$, exprimer a_n explicitement en fonction de n.

b) Dans un repère orthonormé, représenter graphiquement les quatre premiers termes de la suite (a_n).

50 (u_n) est la suite arithmétique de raison 5 telle que $u_0 = -7$.

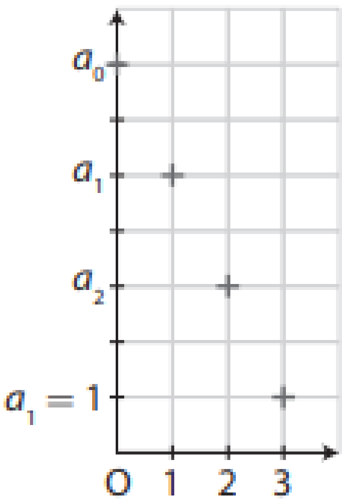
À l'écran de la calculatrice, tabuler la suite (u_n) puis représenter graphiquement ses dix premiers termes en choisissant une fenêtre adaptée.

49 **a)** Pour tout nombre n de $\mathbb{N}$,

$a_n = a_0 + nr$

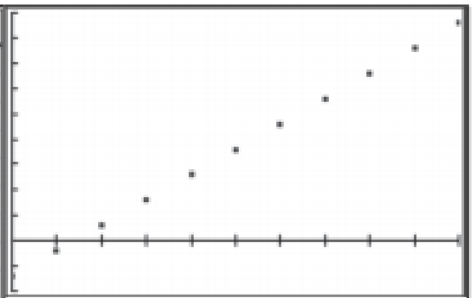
$a_n = 7 - 2n$

b)



50 Pour tout nombre n de $\mathbb{N}$, $u_n = -7 + 5n$.

n	u(n)
0	-7
1	-2
2	3
3	8
4	13
5	18
6	23
7	28
8	33
9	38
10	43



(*fenêtre :* $0 \leqslant X \leqslant 10$, pas 1 et $-10 \leqslant Y \leqslant 45$, pas 5)

<u>**Exercice résolu 9 p 24**</u>

(v_n) est la suite géométrique de raison 2 telle que $v_1 = 7$.

a) Calculer v_{10}.

b) Pour tout nombre n de $\mathbb{N}$, exprimer v_n explicitement en fonction de n.

Solution

a) $v_{10} = v_1 \times 2^{10-1}$

$v_{10} = 7 \times 2^9$

$v_{10} = 7 \times 512$

$v_{10} = 3\,584$

b) Pour tout n de $\mathbb{N}$, $v_n = v_1 \times 2^{n-1}$

c'est-à-dire $v_n = 7 \times 2^{n-1}$.

Pour calculer un terme d'une suite géométrique, on utilise la formule explicite $\boldsymbol{u_n = u_p \times q^{n-p}}$. Pour effectuer le calcul, on veille à respecter les priorités opératoires : on effectue d'abord la puissance.

On sait que $2^{n-1} = \dfrac{2^n}{2}$ donc on a aussi $v_n = \dfrac{7}{2} \times 2^n$.

Exercice 13 p 24

13 (m_n) est la suite géométrique de raison 0,1 telle que $m_{15} = 7$. Calculer m_{10}.

13 $m_{10} = m_{15} \times q^{10-15} = 7 \times 0{,}1^{-5} = 700000$

Questions flash 61 à 66 p 28

61 (u_n) est la suite géométrique de raison 4 telle que $u_1 = 5$.
Laquelle de ces affirmations est exacte ?
(1) Pour calculer u_0, on divise 5 par 4.
(2) Pour calculer u_0, on multiplie 5 par 4.
(3) Pour calculer u_0, on soustrait 4 à 5.

62 Dans chaque cas, dire si les nombres peuvent être des termes consécutifs d'une suite géométrique. Expliquer.
a) 4 ; 8 ; 16 ; 30 ; 60 ; 120 **b)** 100 ; 10 ; 1 ; 0,1 ; 0,01
c) −10 ; 0 ;10 ; 20 ; 30 **d)** −2 ; 4 ; −8 ; 16 ; −32

63 La taille d'un nénuphar double chaque jour. Au bout de 40 jours, il a recouvert tout un étang. Au bout de combien de jours avait-il recouvert la moitié de l'étang ?

64 (v_n) est la suite géométrique de raison 5 telle que $v_0 = 0{,}2$.
Calculer mentalement v_1, v_2, v_3, v_4.

65 (t_n) est la suite géométrique telle que $t_4 = 5$ et $t_5 = 7{,}5$.
Calculer sa raison.

66 (h_n) est la suite géométrique telle que $h_4 = 6$ et $h_6 = 54$.
Quelle peut être sa raison ?

61 $u_1 = qu_0$ c'est-à-dire $5 = 4u_0$ soit $u_0 = \dfrac{5}{4}$.
L'affirmation **(1)** est exacte.

62 **a)** Non : $\dfrac{8}{4} = \dfrac{16}{8} = 2$ mais $\dfrac{30}{16} = 1{,}875$
b) Oui : $\dfrac{10}{100} = \dfrac{1}{10} = \dfrac{0{,}1}{1} = \dfrac{0{,}01}{0{,}1} = 0{,}1$
c) Non : $\dfrac{0}{-10} = 0$ mais $\dfrac{20}{10} = 2$
d) Oui : $\dfrac{4}{-2} = \dfrac{-8}{4} = \dfrac{16}{-8} = \dfrac{-32}{16} = -2$

63 Il avait recouvert la moitié de l'étang au bout de 39 jours.

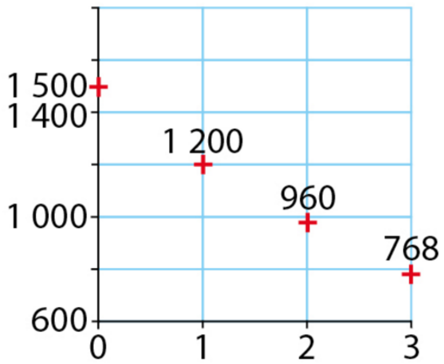
64 • $v_1 = 1$ • $v_2 = 5$ • $v_3 = 25$ • $v_4 = 125$

65 $t_5 = qt_4$ c'est-à-dire $7{,}5 = 5q$
soit $q = \dfrac{7{,}5}{5} = 1{,}5$.

66 $h_6 = q^2h_4$ c'est-à-dire $54 = 6q^2$ soit $q^2 = 9$.
Ainsi, $q = 3$ ou $q = -3$.

Exercices 67 à 71 p 29

67 Ce graphique représente l'évolution du niveau d'eau a_n, en mm, dans un puits le 1er du mois, de juin à septembre.



a) Calculer les trois taux d'évolution d'un mois au mois suivant. Que constate-t-on ?
b) En supposant que l'évolution se poursuive ainsi les mois suivants, modéliser cette situation par une suite géométrique dont on donnera la raison.
c) Estimer le niveau d'eau, en mm, dans ce puits au 1er juin de l'année suivante. *Arrondir à l'unité.*

Pour les exercices 68 à 70, (u_n) est une suite géométrique de raison q.

68 $u_0 = 16$ et $q = \dfrac{1}{2}$. Calculer u_8.

69 $u_6 = 9$ et $q = -3$. Calculer u_0.

70 $u_{10} = 18$ et $u_9 = -6$. Calculer q.

71 (v_n) est la suite géométrique telle que $v_4 = -4$ et $v_7 = -32$.

a) Calculer sa raison q.

b) Calculer v_{10}.

67 **a)** $\frac{1200}{1500} = \frac{960}{1200} = \frac{768}{960} = 0{,}8$

On constate donc que les taux d'évolution d'un mois au mois suivant sont constants. Il s'agit d'une baisse de 20 %.

b) On note h_n la hauteur d'eau, en mm, dans le puits le n-ième mois après le 1[er] juin. (h_n) est la suite géométrique de raison 0,8 telle que $h_0 = 1500$.

Pour tout nombre n de $\mathbb{N}$, $h_n = 1500 \times 0{,}8^n$.

c) $h_{12} = 1500 \times 0{,}8^{12}$ et $h_{12} \approx 103$.

Le 1[er] juin de l'année suivante, il y aura environ 103 mm d'eau dans le puits si l'évolution continue ainsi.

68 $u_8 = u_0 q^8 = 16 \times \left(\frac{1}{2}\right)^8 = \frac{2^4}{2^8} = \frac{1}{2^4} = \frac{1}{16}$

69 $u_0 = u_6 q^{0-6} = 9 \times (-3)^{-6} = \frac{3^2}{3^6} = \frac{1}{3^4} = \frac{1}{81}$

70 $u_{10} = q u_9$ soit $18 = q \times (-6)$

c'est-à-dire $q = \frac{18}{-6} = -3$.

71 **a)** $v_7 = v_4 q^3$ soit $-32 = -4q^3$

c'est-à-dire $q^3 = 8$. Ainsi $q = 2$.

b) $v_{10} = v_4 q^6 = -4 \times 2^6 = -256$

Exercice 76 p 29

76 Algo **a)** Quel est le rôle de ce programme ?

```
U=-1000000
for i in range(1,11):
    U= U/2
    print(U)
```

b) Paul affirme : « Le dernier nombre affiché par le programme est – 1953,125. »
A-t-il raison ?

76 **a)** Ce programme affiche les termes de u_1 à u_{10} de la suite géométrique (u_n) de raison $\frac{1}{2}$ telle que $u_0 = -1000\,000$.

b) Le dernier nombre affiché par ce programme est $-976{,}5625$ (c'est-à-dire u_{10}).

En fait, $-1953{,}125$ est la valeur de u_9 (avant dernier nombre affiché).

Exercices 112 et 113 p 35

112 a et b désignent deux nombres réels avec $b \neq 0$. (u_n) est la suite définie pour tout nombre n de $\mathbb{N}$ par $u_n = a \times b^n$.

Démontrer que la suite (u_n) est géométrique.

113 La désintégration de l'atome de radium 226 donne de l'hélium et un autre élément radioactif, le radon 222. Pour tout nombre n de $\mathbb{N}$, la masse m_n, en gramme, de radon, n jours après la désintégration vérifie la relation $m_{n+1} - m_n = -0{,}165 m_n$.

a) Exprimer m_{n+1} en fonction de m_n.
En déduire la nature de la suite (m_n).

b) Exprimer m_n en fonction de n et de m_0.

c) Avec la calculatrice, déterminer au bout de combien de jours la masse de radon sera inférieure à la moitié de sa valeur initiale.
Ce nombre est la **demi-vie** du radon 222.

112 Pour tout nombre n de $\mathbb{N}$,

$$u_{n+1} = a \times b^{n+1} = a \times b \times b^n = b u_n.$$

Donc la suite (u_n) est géométrique de raison b.

113 **a)** Pour tout nombre n de $\mathbb{N}$,
$m_{n+1} = m_n - 0{,}165 m_n$
$m_{n+1} = 0{,}835 m_n$

Donc la suite (m_n) est géométrique de raison 0,835.

b) Pour tout nombre n de $\mathbb{N}$,

$$m_n = m_0 q^n = m_0 \times 0{,}835^n$$

c) $m_n \leqslant \frac{1}{2} m_0$ équivaut à $m_0 \times 0{,}835^n \leqslant \frac{1}{2} m_0$ c'est-à-dire $0{,}835^n \leqslant \frac{1}{2}$.

Avec la calculatrice, on tabule la suite $(0{,}835^n)$ et on observe que $0{,}835^3 \approx 0{,}58$ et $0{,}835^4 \approx 0{,}49$.

Donc au bout de 4 jours, la masse de radon a diminué de moitié de sa masse initiale.

Exercices 74 et 75 p 29

74 (g_n) est la suite géométrique de raison $\frac{1}{2}$ telle que $g_0 = 10$.

a) Pour tout nombre n de $\mathbb{N}$, exprimer g_n explicitement en fonction de n.

b) Dans un repère orthonormé, représenter graphiquement les cinq premiers termes de la suite (g_n).

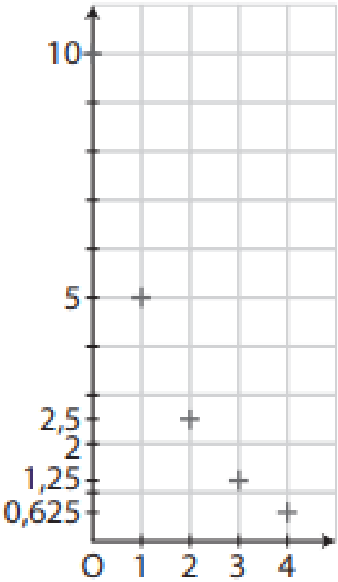
75 (u_n) est la suite géométrique de raison $-\frac{3}{4}$ telle que $u_0 = 50$.

À l'écran de la calculatrice, tabuler la suite (u_n) puis représenter graphiquement ses dix premiers termes en choisissant une fenêtre adaptée.

74 **a)** Pour tout nombre n de $\mathbb{N}$,

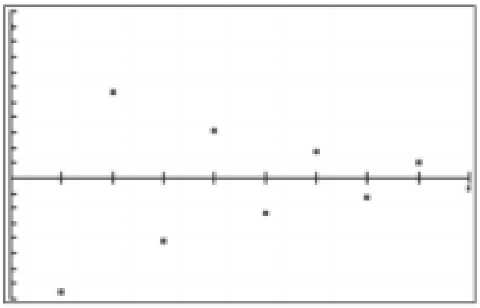
$g_n = g_0 q^n = 10 \times \left(\frac{1}{2}\right)^n$

b)



75

n	u(n)
0	50
1	-37.5
2	28.125
3	-21.09
4	15.82
5	-11.87
6	8.8989
7	-6.674
8	5.0056
9	-3.754
10	2.8157



(*fenêtre :* $0 \leqslant X \leqslant 9$, pas 1 et $-40 \leqslant Y \leqslant 55$, pas 5)

Cours V sommes de termes consécutifs

Exercice résolu 14 p 25

(u_n) est la suite arithmétique de raison 4 telle que $u_2 = -5$.
Pour tout nombre $n \geqslant 2$ de $\mathbb{N}$, on pose $S_n = u_2 + u_3 + u_4 + \ldots + u_n$.

a) Exprimer S_n explicitement en fonction de n.

b) Tabuler la suite (S_n) avec la calculatrice et lire une valeur de n telle que $S_n = 99$.

a) Pour tout nombre $n \geqslant 2$, $S_n = u_2 + u_3 + u_4 + \ldots + u_n$.

$S_n = u_2 + (u_2 + 4) + (u_2 + 2 \times 4) + \ldots + (u_2 + (n-2) \times 4)$

$S_n = (n-1)u_2 + 4(1 + 2 + \ldots + (n-2))$

$S_n = -5(n-1) + 4\dfrac{(n-2)(n-1)}{2} = -5(n-1) + 2(n-2)(n-1)$

$S_n = (n-1)(-5 + 2(n-2))$

$S_n = (n-1)(2n-9)$

b) À l'écran de la calculatrice, on lit que la suite (S_n) prend la valeur 99 pour $n = 10$.

n	an
7	30
8	49
9	72
10	99

- Inutile de calculer chaque terme de S_n.
- On exprime $u_2, u_3, \ldots, u_n$ en fonction de u_2 à l'aide de :

$$\boldsymbol{u_n = u_2 + (n-2)r}$$

- Le nombre de termes de u_2 à u_n est $\boldsymbol{n-2}+1$ c'est-à-dire $\boldsymbol{n-1}$.
- Enfin, on utilise la formule donnant $1 + 2 + \ldots + n$.
- En développant le produit, on obtient $S_n = 2n^2 - 11n + 9$.

<u>Exercice 16 p25</u>

16 (u_n) est la suite arithmétique de raison $-1{,}5$ telle que $u_2 = 0{,}5$. Pour tout nombre $n \geqslant 2$ de $\mathbb{N}$, on pose $S_n = u_2 + u_3 + u_4 + \ldots + u_n$.

a) Exprimer S_n explicitement en fonction de n.

b) Tabuler la suite (S_n) avec la calculatrice et lire une valeur de n telle que $S_n = -77$.

<u>Exercice 55 ; 58 et 60 p 28</u>

55 (u_n) est la suite arithmétique de raison 5 telle que $u_0 = 2$.

Calculer $S = u_0 + u_1 + u_2 + \ldots + u_9 + u_{10}$.

58 (a_n) est la suite arithmétique de raison 1,5 telle que $a_2 = -1$.

Pour tout nombre n de $\mathbb{N}$, $S_n = a_0 + a_1 + \ldots + a_n$.

Expliquer pourquoi $S_n = (n+1)(0{,}75n - 4)$.

60 Une usine a produit 1 000 puces électroniques en 2019. Pour faire des prévisions, les dirigeants supposent que la production augmentera de 180 puces par an dans le futur.

On note p_n la production en $2019 + n$ $(n \in \mathbb{N})$.

a) Exprimer p_{n+1} en fonction de p_n.

b) Combien l'usine prévoit-elle de fabriquer de puces de 2019 à 2025 ?

55 $S = u_0 + (u_0 + 5) + (u_0 + 2 \times 5) + \ldots + (u_0 + 10 \times 5)$

$S = \underbrace{u_0 + u_0 + \ldots + u_0}_{11 \text{termes}} + 5 \times (1 + 2 + \ldots + 10)$

$S = 11u_0 + 5 \times (1 + 2 + \ldots + 10)$

$S = 11 \times 2 + 5 \times \dfrac{10 \times 11}{2}$

$S = 11 \times (2 + 25) = 11 \times 27 = 297.$

58 $S_n = a_0 + (a_0 + 1,5) + \ldots + (a_0 + 1,5n)$

$S_n = (n+1)a_0 + 1,5 \times (1 + 2 + \ldots + n)$

Or, $a_0 = a_2 + (0-2)r = -1 - 2 \times 1,5 = -4$.

Donc, $S_n = -4(n+1) + 1,5 \times \dfrac{n(n+1)}{2}$

$S_n = (n+1)(-4 + 0,75n)$

60 **a)** Pour tout nombre n de $\mathbb{N}$, $p_{n+1} = p_n + 180$.

b) La suite (p_n) est arithmétique de raison 180, donc pour tout nombre n de $\mathbb{N}$, $p_n = 1000 + 180n$.

On note S le nombre de puces que prévoit de fabriquer l'usine de 2019 à 2025.

$S = p_0 + p_1 + \ldots + p_6$

$S = p_0 + (p_0 + 180) + \ldots + (p_0 + 6 \times 180)$

$S = 7p_0 + 180 \times (1 + 2 + \ldots + 6)$

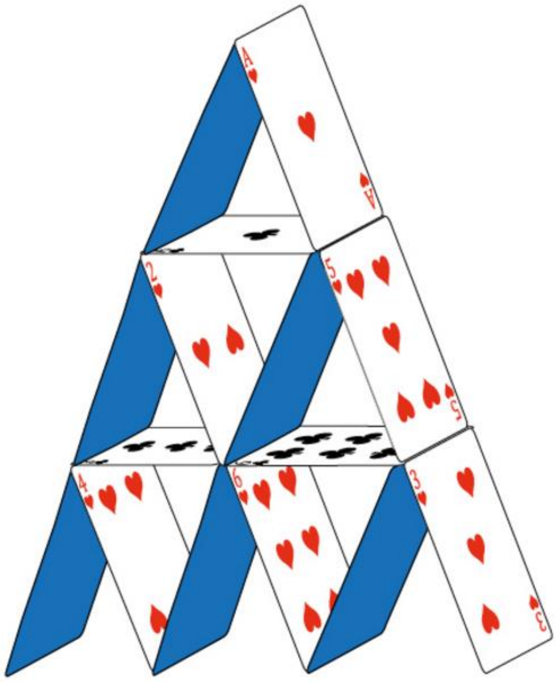
$S = 7 \times 1000 + 180 \times \dfrac{6 \times 7}{2}$

$S = 7 \times (1000 + 3 \times 180) = 7 \times 1540 = 10\,780$

L'usine prévoit de fabriquer 10 780 puces de 2019 à 2025.

Exercice 126 p 37

Raphaël s’amuse à construire des châteaux de cartes sur le modèle ci-contre.



Il souhaite en réaliser un en utilisant exactement toutes les cartes contenues dans cinq jeux de 52 cartes chacun.

Raphaël y parviendra-t-il ?

Si oui, combien le château de cartes aura-t-il d’étages ?

126 Un édifice de n étages, contient
$2+4+6+\ldots+2n$ cartes dressées
et $1+2+\ldots+(n-1)$ cartes horizontales.
Le nombre S total de cartes est :

$$S=2+4+6+\ldots+2n+1+2+\ldots+(n-1)$$
$$S=2(1+2+3+\ldots+n)+1+2+\ldots+(n-1)$$
$$S=3(1+2+3+\ldots+n)-n$$
$$S=3\times\frac{n(n+1)}{2}-n$$
$$S=n\left(\frac{3}{2}n+\frac{3}{2}-1\right)=\frac{n(3n+1)}{2}=\frac{3n^2+n}{2}$$

$5\times 52=260$, donc on cherche n pour que $S=260$ c'est-à-dire pour que $3n^2+n=520$ soit

$$3n^2+n-520=0.$$

$$\Delta=1^2-4\times3\times(-520)=6\,241=79^2$$
$$n'=\frac{-1-79}{6}=-\frac{40}{3}\text{ ou } n''=\frac{-1+79}{6}=13$$

Or, n est un nombre entier naturel, donc $n=13$.
Ainsi, Raphaël pourra construire un château de cartes de 13 étages sur ce modèle.

Exercice résolu 15 p 25

(v_n) est la suite géométrique de raison 3 telle que $v_2=0{,}2$. Calculer $S=v_0+v_1+v_2+\ldots+v_{10}$.

$$S=v_0+v_1+v_2+\ldots+v_{10}$$
$$S=v_0+3\times v_0+3^2\times v_0+\ldots+3^{10}\times v_0$$
$$S=v_0\left(1+3+3^2+\ldots+3^{10}\right)$$
$$S=0{,}2\times\frac{1-3^{11}}{1-3}=0{,}2\times\frac{3^{11}-1}{2}$$
$$S=0{,}1\left(3^{11}-1\right)=17\,714{,}6$$

• Inutile de calculer chaque terme de S.
• On exprime $v_1, v_2, \ldots, v_{10}$ en fonction de v_0 à l'aide de :

$$\boldsymbol{v_n=v_0\times q^n}$$

• Enfin, on utilise la formule donnant $1+q+q^2+\ldots+q^n$.

Exercices 17 et 18 p 25

17 (v_n) est la suite géométrique de raison 2 telle que $v_1 = -1$.
Calculer $S = v_1 + v_2 + v_3 + \ldots + v_8$.

18 (w_n) est la suite géométrique de raison 0,8 telle que $w_2 = 10$. Calculer $T = w_2 + w_3 + \ldots + w_7$.

17 $S = v_1 + 2v_1 + 2^2 v_1 + \ldots + 2^7 v_1$

$S = v_1(1 + 2 + 2^2 + \ldots + 2^7)$

$$S = -1 \times \frac{1-2^8}{1-2} = 1 - 2^8 = -255$$

18 $T = w_2 + 0{,}8w_2 + 0{,}8^2 w_2 + \ldots + 0{,}8^5 w_2$

$T = w_2(1 + 0{,}8 + 0{,}8^2 + \ldots + 0{,}8^5)$

$$T = 10 \times \frac{1-0{,}8^6}{1-0{,}8} = 50(1 - 0{,}8^6)$$

$T = 36{,}892\,8$

Questions flash 77 et 78 p 29

77 $S = 1 + 3 + 3^2 + \ldots + 3^7 + 3^8$

Sans utiliser de calculatrice, dire laquelle de ces affirmations est exacte.

(1) $S = \dfrac{3^9 - 1}{2}$ **(2)** $S = \dfrac{1 - 3^9}{2}$ **(3)** $S = \dfrac{1 + 3^9}{4}$

78 $F = 1 - 10 + 10^2 - 10^3 + 10^4 - 10^5$

Sans utiliser de calculatrice, dire laquelle de ces affirmations est exacte.

(1) $F = 111\,111$ **(2)** $F = 90\,901$ **(3)** $F = -90\,901$

77 $S = \frac{1-3^9}{1-3} = \frac{1-3^9}{-2} = \frac{3^9-1}{2}$

L'affirmation **(1)** est exacte.

78 $F = \frac{1-(-10)^6}{1-(-10)} = \frac{1}{11} \times (1-10^6) = -90\,909$

L'affirmation **(1)** est exacte.

<u>Exercices 79 ; 80 et 82 p 29</u>

79 (u_n) est la suite géométrique de raison 4 telle que $u_0 = -2$.

Calculer $S = u_0 + u_1 + u_2 + \ldots + u_9 + u_{10}$.

80 (v_n) est la suite géométrique de raison -3 telle que $v_5 = 1$.

Calculer $T = v_5 + v_6 + v_7 + \ldots + v_{19} + v_{20}$.

82 Algo

Voici un algorithme.

a) On exécute cet algorithme avec $n = 4$.

```
S ← 1
Pour k allant de 1 à n
  |S ← S + 1,5^k
Fin Pour
```

Compléter le tableau ci-dessous de suivi des variables k et S.

k		1	…
S	1	2,5	…

Quelle est la valeur de S obtenue en fin d'algorithme ?

b) Expliquer le rôle de cet algorithme.

c) Coder cet algorithme en langage Python, saisir la fonction obtenue.

Exécuter cette fonction avec $n = 4$ pour la tester puis avec $n = 10$.

79 $S = u_0 + 4u_0 + 4^2u_0 + \dots + 4^9u_0 + 4^{10}u_0$

$S = u_0(1 + 4 + 4^2 + \dots + 4^9 + 4^{10})$

$S = -2 \times \dfrac{1-4^{11}}{1-4} = -2 \times \dfrac{1-4^{11}}{-3} = \dfrac{2}{3} \times (1-4^{11})$

$S = -2\,796\,202$

80 $T = v_5 + (-3)v_5 + (-3)^2v_5 + \dots + (-3)^{15}v_5$

$T = v_5(1 + (-3) + (-3)^2 + \dots + (-3)^{15})$

$T = \dfrac{1-(-3)^{16}}{1-(-3)} = \dfrac{1-3^{16}}{4} = -10\,761\,680$

82 **a)**

k		1	2	3	4
S	1	2,5	4,75	8,125	13,187 5

On obtient $S = 13{,}187\,5$ à la fin de l'algorithme.

b) Cet algorithme donne la somme des $(n+1)$ premiers termes de la suite géométrique (u_n) de raison 1,5 telle que $u_0 = 1$.

c)

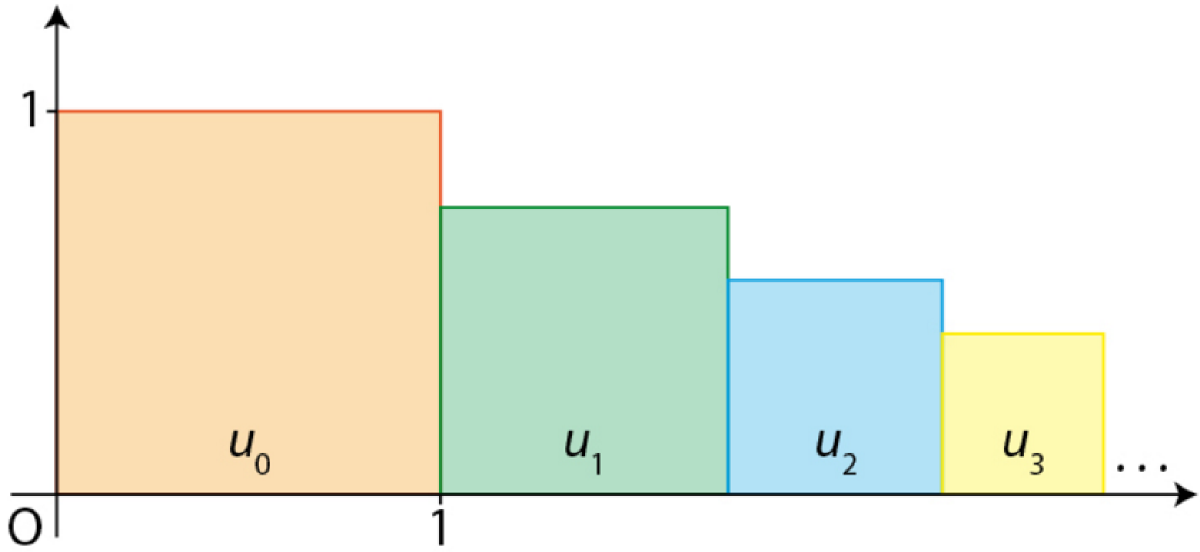
```
def S(n):
    s=1
    for i in range(1,n+1):
        s=s+1.5**i
    return s
```

On obtient :

```
>>> S(4)
13.1875
>>> S(10)
170.9951171875
```

Exercice 115 p 36

115 Voici une suite de carrés construits dans un repère orthonormé.



À chaque étape, le côté du carré est multiplié par $\frac{3}{4}$.

Pour tout nombre n de $\mathbb{N}$, on note u_n l'aire (en unité d'aire) du carré construit à l'étape n.

a) Quelle est la nature de la suite (u_n) ? Justifier.

b) Pour tout nombre n de $\mathbb{N}$, exprimer en fonction de n la somme :

$$S = u_0 + u_1 + \ldots + u_n$$

115 **a)** Pour obtenir l'aire d'un carré, on multiplie par $\left(\frac{3}{4}\right)^2$ l'aire du carré précédent. Autrement dit, pour tout nombre n de $\mathbb{N}$, $u_{n+1} = \frac{9}{16}u_n$.

La suite (u_n) est géométrique de raison $\frac{9}{16}$.

b) $S = u_0 + \frac{9}{16}u_0 + \ldots + \left(\frac{9}{16}\right)^n u_0$

$$S = u_0\left[1 + \frac{9}{16} + \left(\frac{9}{16}\right)^2 + \ldots + \left(\frac{9}{16}\right)^n\right]$$

$$S = u_0 \times \frac{1 - \left(\frac{9}{16}\right)^{n+1}}{1 - \frac{9}{16}}$$

Or, $u_0 = 1^2 = 1$, donc :

$$S = \frac{16}{7} \times \left[1 - \left(\frac{9}{16}\right)^{n+1}\right].$$