Mathématiques 2nd	**Chapitre 6 : Résolution d'équation et d'inéqations**	Nombres et calculs

I – Equations :

a) Vocabulaire :

Résoudre dans $\mathbb{R}$ une équation **d'inconnue** x signifie déterminer **toutes les valeurs réelles de** x pour lesquelles **l'égalité est vraie :**
Ces nombres constituent **l'ensemble des solutions de l'équation**.

❖ Exemple : On veut résoudre l'équation du premier degré à une inconnue : $5x - 3 = x + 5$

On a $5x - 3 = x + 5$ équivaut à $4x - 3 = 5$

$$\Leftrightarrow \quad 4x = 8$$

$$\Leftrightarrow \quad \frac{4x}{4} = \frac{8}{4}$$

$$\Leftrightarrow \quad x = 2$$

La solution est 2 , on le note également $S = \{2\}$

b) Equations produit-quotient nul :

❖ Propriétés :

Un produit est nul si et seulement si un des facteurs est nul. On a donc :

$A \times B = 0$ équivaut à $A = 0$ ou $B = 0$. $\frac{A}{B} = 0$ équivaut à $A = 0$ et $B \neq 0$

❖ Exemples :

☐ Résoudre dans $\mathbb{R}$: $(2x + 4)(9 - 3x) = 0$

$(2x + 4)(9 - 3x) = 0$ équivaut à $2x + 4 = 0$ ou $9 - 3x = 0$

$2x = -4$ ou $-3x = -9$

$x = -\frac{4}{2} = -2$ ou $x = \frac{-9}{-3} = 3$

Les solutions sont -2 et 3 . $S = \{-2\,;3\}$

☐ Résoudre dans $\mathbb{R}$: $\frac{x+5}{x-2} = 0$

Méthode : - déterminer l'ensemble de résolution

- appliquer le théorème du quotient-nul

$x - 2 = 0 \Leftrightarrow x = 2$ donc l'ensemble de résolution est $\mathbb{R} - \{2\}$.

Dans $\mathbb{R} - \{2\}$ $\frac{x+5}{x-2} = 0 \Leftrightarrow x + 5 = 0 \Leftrightarrow x = -5$

L'ensemble des solutions est donc $S = \{-5\}$

c) Equations du type $x^2 = a$:

❖ Propriétés :

a désigne un nombre réel. Si $a > 0$, alors l'équation $x^2 = a$ admet exactement deux solutions : $\sqrt{a}$ et $-\sqrt{a}$. Si $a = 0$, alors l'équation $x^2 = a$ admet une solution : 0 Si $a < 0$, alors l'équation $x^2 = a$ admet aucune solution. On note $S = \emptyset$

❖ Exemples :

Résoudre dans $\mathbb{R}$: $x^2 = 7$	Résoudre dans $\mathbb{R}$: $(x-2)^2 = 3$
$x^2 = 7$ équivaut à $x = -\sqrt{7}$ ou $x = \sqrt{7}$ L'ensemble des solutions est donc $S = \{-\sqrt{7}\,;\sqrt{7}\}$	$(x-2)^2 = 3$ équivaut à $x - 2 = -\sqrt{3}$ ou $x - 2 = \sqrt{3}$ c'est-à-dire $x = 2 - \sqrt{3}$ ou $x = 2 + \sqrt{3}$ L'ensemble des solutions est donc $S = \{2-\sqrt{3}\,;2+\sqrt{3}\}$

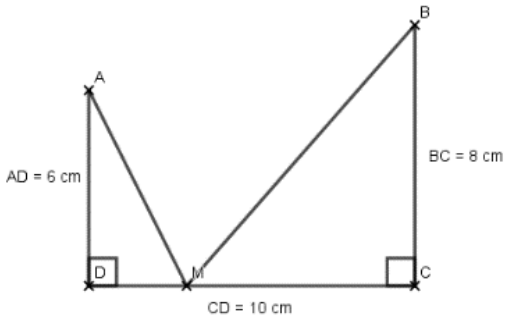
d) Résolutions de problèmes :

❖ Méthode générale :

- On définit ce que l'on cherche (l'inconnue)
- On repère les informations qui permettront de trouver toutes les valeurs possibles de l'inconnue
- Grâce à ces informations on écrit une équation
- On résout l'équation par équivalences
- On répond à la question posée dans le problème par une phrase.

❖ Exemple :

M est un point mobile sur le segment [CD], et les triangles ADM et BCM sont rectangles.
Quelle doit être la distance CM pour que M soit équidistant de A et B ?



On pose $x = CM$
En appliquant le théorème de Pythagore aux triangles rectangles ADM et BCM, on obtient :
D'une part $BM^2 = x^2 + 8^2$ d'autre part $AM^2 = (10-x)^2 + 6^2$
On souhaite que les distances AM et BM soit égales ce qui équivaut à AM²=BM² puisque AM et BM sont positifs.
On doit donc résoudre l'équation : $x^2 + 8^2 = (10-x)^2 + 6^2$

$\Leftrightarrow x^2 + 64 = (10-x)^2 + 36 \Leftrightarrow x^2 + 64 = 100 - 20x + x^2 + 36 \Leftrightarrow 64 = 136 - 20x$
$\Leftrightarrow 20x = 72 \Leftrightarrow x = \frac{72}{20} = 3{,}6$. $S = \{3{,}6\}$

La distance CM doit être égale à 3,6 pour que le point M soit équidistant des points A et B.

II – Résolutions d'inéquation du premier degré :

a) Vocabulaire :

Résoudre dans $\mathbb{R}$ une inéquation **d'inconnue** x signifie déterminer **toutes les valeurs réelles de** x pour lesquelles **l'inégalité est vraie :**
Ces nombres constituent **l'ensemble des solutions de l'inéquation**.

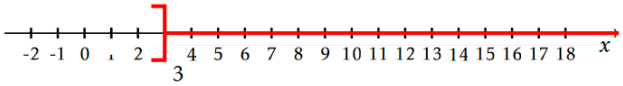
❖ Exemple : On veut résoudre dans $\mathbb{R}$ l'inéquation : $3x + 4 > -3x + 22$

On a $3x + 4 > -3x + 22$ équivaut à $6x + 4 > 22$

$\Leftrightarrow 6x > 18$

$\Leftrightarrow \frac{6x}{6} > \frac{18}{6}$

$\Leftrightarrow x > 3$



Les solutions de l'inéquation sont tous les nombres réels strictement supérieurs à 3 : $S =]3\,;+\infty\,[$

b) Méthode :

On cherche à isoler l'inconnue x en utilisant les 3 règles suivantes :

- Si on additionne/soustrait par un même nombre les deux membres d'une inégalité, elle reste équivalente.
- Si on multiplie/divise par un même nombre positif les deux membres d'une inégalité, elle reste équivalente.
- Si on multiplie/divise par **un même nombre négatif** les deux membres d'une inégalité, elle reste équivalente mais le sens de **l'inégalité change.**

Résoudre dans $\mathbb{R}$: $8x + 2 \leq 0$	Résoudre dans $\mathbb{R}$: $-4x + 7 < 2x + 19$
$8x + 2 \leq 0$ équivaut à $8x \leq -2$ $\Leftrightarrow \frac{8x}{8} \leq \frac{-2}{8}$ **car 8 positif** $\Leftrightarrow x \leq -0{,}25$ L'ensemble des solutions est donc $S =]-\infty; -0{,}25]$	$-4x + 7 < 2x + 19$ équivaut à $-6x + 7 < 19$ $\Leftrightarrow -6x < 12$ $\Leftrightarrow \frac{-6x}{-6} > \frac{12}{-6}$ **car -6 négatif** $\Leftrightarrow x > -2$ L'ensemble des solutions est donc $S =]-2; +\infty[$