

***** SIGNE D'UNE FONCTION POLYNOME – RESOLUTION EQUATION*****

61 – 62 -68-69 p77

61 Résoudre chaque inéquation.

a) $(x - 3)(x + 1) > 0$

b) $t^2 - 7t + 12 > 0$

c) $-x^2 + 7x - 6 \geq 0$

d) $-3u^2 + 5u - 3 \leq 0$

62 Résoudre chaque inéquation.

a) $-2a^2 + 13a > 15$

b) $x^2 + 2,1x \leq 3,52$

c) $10x^2 + 0,1 > -2x$

d) $t^2 + \frac{13}{16} \leq \frac{1}{2}t$

68 f est une fonction polynôme du second degré dont les trois expressions sont indiquées ci-dessous.

Forme développée	$f(x) = 3x^2 + 3x - 60$
Forme canonique	$f(x) = 3\left(x + \frac{1}{2}\right)^2 - \frac{243}{4}$
Forme factorisée	$f(x) = 3(x - 4)(x + 5)$

Choisir l'expression la plus appropriée pour résoudre chaque inéquation.

a) $f(x) \leq 0$

b) $f(x) \geq -60$

c) $f(x) \geq -\frac{243}{4}$

69 Une entreprise fabrique x dizaines d'objets par jour. Son bénéfice, exprimé en centaines d'euros, est donné par la fonction B définie sur l'intervalle $[0 ; 10]$ par $B(x) = -2x^2 + 12x - 10$.

a) Dresser le tableau de signes de la fonction B sur l'intervalle $[0 ; 10]$.

b) En déduire les solutions de l'inéquation $B(x) > 0$ sur l'intervalle $[0 ; 10]$.

c) Quelles quantités d'objets l'entreprise doit-elle produire et vendre pour réaliser un bénéfice ?

125 Algo Relier mathématiques et économie
 40 min

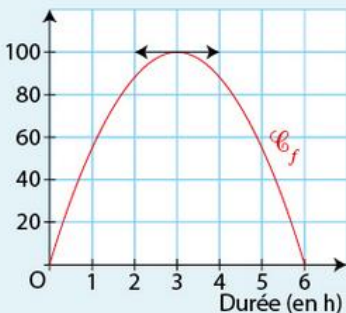
D'après Bac 2018, Amérique du Nord

On appelle fonction de satisfaction toute fonction qui prend ses valeurs entre 0 et 100.

Lorsque la valeur 100 est atteinte, on dit qu'il y a « saturation ».

Les parties A, B et C peuvent être traitées indépendamment.

Partie A. Un étudiant prépare un concours, pour lequel sa durée de travail varie entre 0 et 6 h par jour. Il modélise sa satisfaction en fonction de son temps de travail quotidien par la fonction « satisfaction » f dont la courbe représentative est donnée ci-dessus.



Déterminer par lecture graphique, la durée de travail conduisant à un état de « saturation ».

Partie B. La fonction « envie » correspondant à la fonction de satisfaction précédente est donnée par :

$$g(x) = -\frac{200}{9}x + \frac{200}{3}$$

On admet qu'il y a « souhait » lorsque la fonction « envie » est positive ou nulle et « rejet » lorsque la fonction « envie » est strictement négative.

Recopier et compléter l'algorithme suivant, pour qu'il affiche l'état d'esprit de cet étudiant. La variable t représente la durée du travail, en h, de l'étudiant

```

y ← -200/9 t + 200/3
Si y ≥ ...
    Afficher "..."
sinon
    Afficher "..."
Fin Si
  
```

Partie C. Dans cette partie, on considère la fonction de satisfaction correspondant à la satisfaction d'un(e) client(e) d'un institut de beauté qui s'est offert un massage d'une heure.

La fonction est définie sur l'intervalle $[0 ; 60]$ par :

$$h(x) = -\frac{1}{36}x^2 + \frac{10}{3}x$$

où x représente la durée du massage en minute.

a) Déterminer à quel instant va être atteint « la saturation ».

b) La personne est dite « heureuse » lorsque la satisfaction est supérieure à 60. Déterminer à partir de quel instant la personne sera « heureuse ».

102 Le plan est muni d'un repère orthonormé d'origine O .

d est la droite d'équation $y = 2x + 4$.

$M(x ; y)$ est un point de cette droite.

Déterminer les coordonnées des points M tels que la distance OM soit égale à $\sqrt{5}$.

114 Prendre des initiatives

Raisonner **Modéliser**

Un groupe d'amis a gagné les 2 millions d'euros de la cagnotte du Loto.

Ils se partagent équitablement le gain.

Combien sont-ils sachant que l'un d'eux affirme : « Si nous avions été 5 de moins, nous aurions gagné chacun 20 000 € de plus » ?

82 p81

82 Rechercher les points d'intersection de deux courbes

f et g sont les fonctions définies sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = 3x - 1$ et sur $\mathbb{R}^*$ par $g(x) = \frac{1}{x}$.

On note $\mathcal{C}_f$ et $\mathcal{C}_g$ les courbes représentatives respectives des fonctions f et g dans un repère.

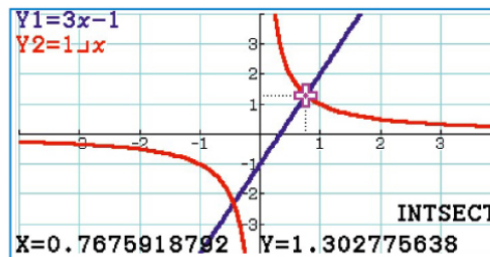
a) Avec la calculatrice, conjecturer le nombre de points d'intersection des courbes $\mathcal{C}_f$ et $\mathcal{C}_g$ et leurs abscisses.

b) Déterminer algébriquement les abscisses exactes des points d'intersections de $\mathcal{C}_f$ et $\mathcal{C}_g$.

Confronter à la conjecture émise à la question a).

Solution

a) On conjecture que $\mathcal{C}_f$ et $\mathcal{C}_g$ ont deux points d'intersection d'abscisses x_1 et x_2 avec $x_1 \approx -0,43$ et $x_2 \approx 0,77$.



b) Les abscisses des points d'intersection de $\mathcal{C}_f$ et $\mathcal{C}_g$ sont les solutions de l'équation $f(x) = g(x)$ c'est-à-dire $3x - 1 = \frac{1}{x}$.

Dans $\mathbb{R}^*$, cette équation équivaut à $(3x - 1)x = 1$, c'est-à-dire $3x^2 - x - 1 = 0$.

$$\Delta = (-1)^2 - 4 \times 3 \times (-1) = 1 + 12 = 13.$$

$\Delta > 0$ donc l'équation a deux solutions :

$$x_1 = \frac{1 - \sqrt{13}}{6} \quad \text{et} \quad x_2 = \frac{1 + \sqrt{13}}{6}.$$

Donc $\mathcal{C}_f$ et $\mathcal{C}_g$ ont deux points d'intersection d'abscisses x_1 et x_2 .

On peut vérifier qu'effectivement $x_1 \approx -0,43$ et $x_2 \approx 0,77$.

83 f et g sont les fonctions définies sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x) = \frac{1}{2}x - \frac{3}{4}$$

et sur $\mathbb{R}^*$ par
$$g(x) = \frac{1}{x}.$$

On note $\mathcal{C}_f$ et $\mathcal{C}_g$ les courbes représentatives respectives des fonctions f et g dans un repère.

a) Avec la calculatrice, conjecturer le nombre de points d'intersection des courbes $\mathcal{C}_f$ et $\mathcal{C}_g$ et leurs abscisses.

b) Déterminer algébriquement les valeurs exactes des abscisses des points d'intersection de $\mathcal{C}_f$ et $\mathcal{C}_g$.

Confronter à la conjecture émise au **a**).

61 a)

x	$-\infty$	-1	3	$+\infty$	
signe	$+$	0	$-$	0	$+$

$$\mathcal{S} =]-\infty; -1[\cup]3; +\infty[.$$

b) On calcule le discriminant :

$$\Delta = (-7)^2 - 4 \times 1 \times 12 = 1 > 0$$

L'expression a deux racines :

$$t_1 = \frac{7 - \sqrt{1}}{2} = 3 \text{ et } t_2 = \frac{7 + \sqrt{1}}{2} = 4$$

t	$-\infty$	3	4	$+\infty$	
signe	$+$	0	$-$	0	$+$

$$\mathcal{S} =]-\infty; 3[\cup]4; +\infty[.$$

c) On calcule le discriminant :

$$\Delta = 7^2 - 4 \times (-1) \times (-6) = 25 > 0$$

L'expression a deux racines :

$$x_1 = \frac{-7 - \sqrt{25}}{-2} = 6 \text{ et } x_2 = \frac{-7 + \sqrt{25}}{-2} = 1$$

x	$-\infty$	1	6	$+\infty$	
signe	$-$	0	$+$	0	$-$

$$\mathcal{S} = [1; 6].$$

d) On calcule le discriminant :

$$\Delta = (-5)^2 - 4 \times 3 \times 3 = -11 < 0$$

u	$-\infty$	$+\infty$
signe		$+$

$$\mathcal{S} = \emptyset.$$

62 a) L'inéquation peut s'écrire :

$$-2a^2 + 13a - 15 > 0$$

On calcule le discriminant :

$$\Delta = (13)^2 - 4 \times (-2) \times (-15) = 49 > 0$$

L'expression a deux racines :

$$a_1 = \frac{-13 - \sqrt{49}}{-4} = 5 \text{ et } a_2 = \frac{-13 + \sqrt{49}}{-4} = \frac{3}{2}$$

a	$-\infty$	$\frac{3}{2}$	5	$+\infty$	
signe	$-$	0	$+$	0	$-$

$$\mathcal{S} = \left] \frac{3}{2} ; 5 \right[.$$

b) L'inéquation peut s'écrire :

$$x^2 + 2,1x - 3,52 \leq 0$$

On calcule le discriminant :

$$\Delta = 2,1^2 - 4 \times 1 \times (-3,52) = 18,49 > 0$$

L'expression a deux racines :

$$x_1 = \frac{-2,1 - \sqrt{18,49}}{2} = -3,2 \text{ et}$$

$$x_2 = \frac{-2,1 + \sqrt{18,49}}{2} = 1,1$$

x	$-\infty$	$-3,2$	$1,1$	$+\infty$	
signe	+	0	-	0	+

$$\mathcal{S} = [-3,2 ; 1,1].$$

c) L'inéquation peut s'écrire :

$$10x^2 + 2x + 0,1 > 0$$

On calcule le discriminant :

$$\Delta = 2^2 - 4 \times 10 \times 0,1 = 0$$

L'expression a une racine :

$$x_1 = \frac{-2}{20} = -0,1$$

x	$-\infty$	$-0,1$	$+\infty$
signe	$+$	0	$+$

$$\mathcal{S} =]-\infty ; -0,1[\cup]-0,1 ; +\infty[.$$

d) L'inéquation peut s'écrire :

$$t^2 - \frac{1}{2}t + \frac{13}{16} \leq 0$$

On calcule le discriminant :

$$\Delta = \left(-\frac{1}{2}\right)^2 - 4 \times 1 \times \frac{13}{16} = -3 < 0$$

t	$-\infty$	$+\infty$
signe	$+$	

$$\mathcal{S} = \emptyset.$$

68 a) Forme factorisée

x	$-\infty$	-5	4	$+\infty$	
signe	$+$	0	$-$	0	$+$

$$\mathcal{S} = [-5 ; 4]$$

b) Forme développée

$f(x) \geq -60$ est équivalente à $3x^2 + 3x \geq 0$ soit
 $3x(x+1) \geq 0$

x	$-\infty$	-1	0	$+\infty$	
signe	$+$	0	$-$	0	$+$

$$\mathcal{S} =]-\infty ; -1] \cup [0 ; +\infty[$$

c) Forme canonique

Pour tout réel x , $\left(x + \frac{1}{2}\right)^2 \geq 0$ on en déduit donc
 que pour tout réel x :

$$3\left(x + \frac{1}{2}\right)^2 - \frac{243}{4} \geq -\frac{243}{4}$$

$$\mathcal{S} = \mathbb{R}$$

69 a) On remarque que $x = 1$ est une racine évidente de B. La seconde racine vérifie :

$$x' \times 1 = \frac{-10}{-2} = 5 \text{ donc } x' = 5$$

On obtient alors le tableau de signes :

x	0	1	5	10	
signe	—	0	+	0	—

b) $\mathcal{S} =]1 ; 5[$

c) L'entreprise réalise un bénéfice lorsqu'elle produit entre 11 et 49 objets.

125 Partie A

L'état de saturation est atteint pour 3 h de travail.

Partie B

Saisir t

$$y \leftarrow -\frac{200}{9}t + \frac{200}{3}$$

Si $y \geq 0$

Afficher « **souhait** »

Sinon

Afficher « **rejet** »

Fin Si

Partie C

a) On doit résoudre $h(x) = 100$.

$$-\frac{1}{36}x^2 + \frac{10}{3}x - 100 = 0$$

On calcule le discriminant :

$$\Delta = \left(\frac{10}{3}\right)^2 - 4 \times \left(-\frac{1}{36}\right) \times (-100) = 0$$

L'équation a une solution $x = \frac{-\frac{10}{3}}{2 \times \left(-\frac{1}{36}\right)} = 60$

La « saturation » est atteinte à 60 min.

b) On doit résoudre $h(x) \geq 60$.

$$-\frac{1}{36}x^2 + \frac{10}{3}x - 60 \geq 0$$

On calcule le discriminant :

$$\Delta = \left(\frac{10}{3}\right)^2 - 4 \times \left(-\frac{1}{36}\right) \times (-60) = \frac{40}{9}$$

Les deux racines sont :

$$x_1 = \frac{-\frac{10}{3} - \sqrt{\frac{40}{9}}}{2 \times \left(-\frac{1}{36}\right)} = 60 + 12\sqrt{10} > 60$$

$$\text{Ou } x_2 = \frac{-\frac{10}{3} + \sqrt{\frac{40}{9}}}{2 \times \left(-\frac{1}{36}\right)} = 60 - 12\sqrt{10}$$

On dresse le tableau de signes :

x	0	$60 - 12\sqrt{10}$	60
Signe	-	0	+

La personne est dite heureuse à partir de $60 - 12\sqrt{10}$ min, soit environ 22 min.

102 M est un point de la droite d donc M a pour coordonnées $(x ; 2x + 4)$

De plus, on veut que $OM = \sqrt{5}$ soit :

$$\sqrt{x^2 + (2x + 4)^2} = \sqrt{5}$$

ce qui équivaut à :

$$x^2 + (2x + 4)^2 = 5$$

c'est-à-dire : $5x^2 + 16x + 11 = 0$

$$\Delta = 16^2 - 4 \times 5 \times 11 = 36$$

$\Delta > 0$ donc l'équation a deux solutions :

$$x_1 = \frac{-16 - \sqrt{36}}{2 \times 5} = -2,2 \text{ et } x_2 = \frac{-16 + \sqrt{36}}{2 \times 5} = -1$$

Les points M ont donc pour coordonnées $(-2,2 ; -0,4)$ et $(-1 ; 2)$.

114 On note n le nombre de personnes du groupe d'amis et le gain par personne.

L'énoncé se traduit par le système :

$$\begin{cases} nx = 2 \times 10^6 \\ (n - 5)(x + 20\,000) = 2 \times 10^6 \end{cases}$$

On obtient l'équation :

$$\frac{-5x^2 - 10^5x + 4 \times 10^{10}}{x} = 0$$

$x \neq 0$, ce qui équivaut à $-5x^2 - 10^5x + 4 \times 10^{10} = 0$

On calcule le discriminant :

$$\Delta = (-10^5)^2 - 4 \times (-5) \times (4 \times 10^{10})$$

$$\Delta = 10^{10} \times 81$$

Les solutions sont :

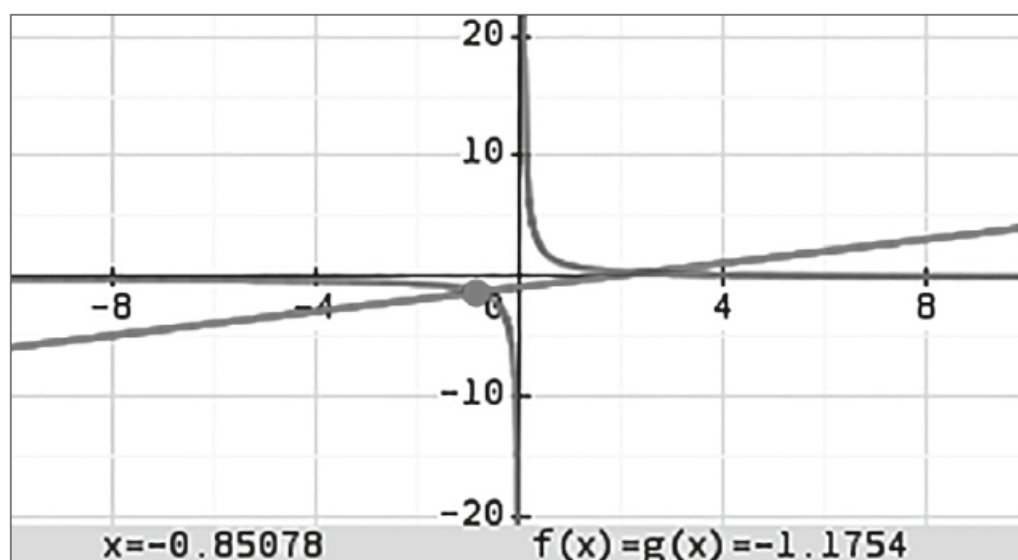
$$x_1 = \frac{10^5 - \sqrt{81 \times 10^{10}}}{2 \times (-5)} = 8 \times 10^4 \text{ ou}$$

$$x_2 = \frac{10^5 + \sqrt{81 \times 10^{10}}}{-10} = -10^5 < 0$$

Le nombre d'amis du groupe est donné par :

$$\frac{2 \times 10^6}{8 \times 10^4} = \frac{200}{8} = 25.$$

Il y avait 25 amis dans le groupe et chacun a gagné 80 000 €.



Les courbes $\mathcal{C}_f$ et $\mathcal{C}_g$ semblent avoir deux points d'intersection. Le premier a pour abscisse $x_1 \approx -0,85$ et le second $x_2 \approx 2,35$

b) Les abscisses des points d'intersection des courbes $\mathcal{C}_f$ et $\mathcal{C}_g$ sont les solutions dans $\mathbb{R}^*$ de l'équation $f(x) = g(x)$ c'est-à-dire :

$$\frac{1}{2}x - \frac{3}{4} = \frac{1}{x}$$

Dans $\mathbb{R}^*$ cette équation équivaut à $\left(\frac{1}{2}x - \frac{3}{4}\right)x = 1$
c'est-à-dire $\frac{1}{2}x^2 - \frac{3}{4}x - 1 = 0$.

$$\Delta = \left(-\frac{3}{4}\right)^2 - 4 \times \frac{1}{2} \times (-1) = \frac{41}{16}$$

$\Delta > 0$ donc l'équation a deux solutions :

$$x_1 = \frac{\frac{3}{4} - \sqrt{\frac{41}{16}}}{2 \times \frac{1}{2}} = \frac{3 - \sqrt{41}}{4} \text{ et}$$

$$x_2 = \frac{\frac{3}{4} + \sqrt{\frac{41}{16}}}{2 \times \frac{1}{2}} = \frac{3 + \sqrt{41}}{4}$$

Donc $\mathcal{C}_f$ et $\mathcal{C}_g$ ont deux points d'intersections d'abscisses x_1 et x_2 .

On vérifie que $x_1 \approx -0,85$ et $x_2 \approx 2,35$