

I – Fonctions numériques :

□ Définition

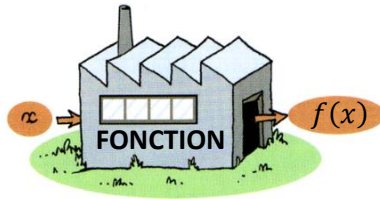
Soit D_f une partie de $\mathbb{R}$ (intervalle ou réunion d'intervalles).

On définit une **fonction** f sur D_f en associant à tout réel x de D_f , un unique réel noté $f(x)$

- On dit que $f(x)$ est l'**image** de x par la fonction f et que D_f est l'**ensemble de définition** de f .

- Lorsque $y = f(x)$, on dit que le nombre x est un **antécédent** du nombre y par la fonction f .

Nombre x de départ
 x peut changer de valeur, peut
varier dans D_f :
 x s'appelle **la variable**



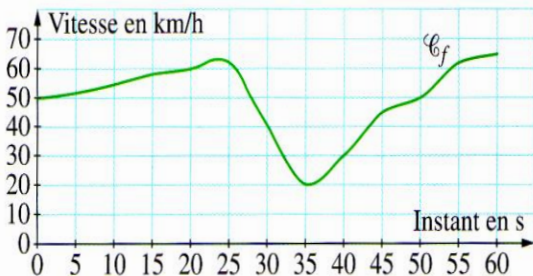
Nouveau nombre d'arrivée
 $f(x)$ est l'**image** de x

❖ Remarques :

- Un nombre de D_f a une image unique.
- Mais une image peut être commune à plusieurs nombres de D_f .
- Il y a plusieurs façons de définir une fonction. En voici différents exemples.

a) Avec un graphique

La courbe ci-dessous définit la fonction V qui, au temps en secondes variant dans $D_V = [0 ; 60]$, définit la vitesse de Jules en km/h .



Evolution de la vitesse en fonction du temps :

- entre $t = 0$ et $t = 24$: **la vitesse augmente**
- entre $t = 24$ et $t = 35$: **la vitesse baisse**

Quelle était sa vitesse à $t = 20$?	À quel moment roulait-il à $30 km/h$?
Il roulait à 60 km/h. On note $V(20) = 60$ 60 est l'image de 20 par V. 20 est un antécédent de 60 par V.	Au bout de 32 s et aussi 40 s. On note $V(32) = V(40) = 30$. 30 a donc deux antécédents par V.

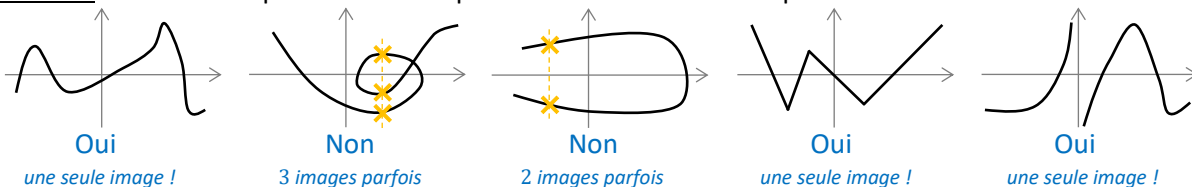


❖ Remarques :

Sur l'axe des abscisses, on lit les antécédents

Sur l'axe des ordonnées, on lit les images

Exercice : ces courbes peuvent-elles représenter des fonctions ou pas ?



b) Avec un tableau de valeurs

Ce tableau définit la fonction P qui associe à la masse x d'une lettre le prix du timbre.

Masse en g	15	30	45	60	90	120	antécédents
Prix en €	0,54	0,86	0,86	1,30	1,30	2,11	images

Combien faut-il payer pour une lettre de 15 g ?	Dans quelle situation doit-il payer 1,30 € ?
Il faut payer 0,54 €. On note $P(15) = 0,54$. 0,54 est l'image de 15 par P. 15 est un antécédent de 0,54 par P. 	Pour une lettre entre 60 g et 90 g. On note $P(60) = P(90) = 1,30$. 1,30 a donc une infinité d'antécédents par P. 

❖ **Exercice :** Compléter le tableau de données et les phrases suivantes.

- -8 est l'image de 4 par la fonction f .
- Un antécédent de 4 par la fonction f est -3
- -8 a pour antécédent 15 par la fonction f
- $f(-2) = f(7) = 2$
- 12 a pour image 17 par la fonction f .
- L'image de 10 par la fonction f est 12.

x	-3	4	-2	12	7	15	10
$f(x)$	4	-8	2	17	2	-8	12

c) Avec une formule

Pour déterminer le montant des impôts total brut correspondant à la tranche de revenu annuel R (entre 13 000 et 27 000 €), on utilise la formule suivante :

$$B(R) = R \times 0,11 - 1386,55$$

Cette formule définit une fonction sur l'intervalle de départ $\mathcal{D}_B = [13\ 000 ; 27\ 000]$.

Combien d'impôt pour un revenu de 17 500 € ?	Dans quelle situation doit-on payer 815,10 € ?
$B(17\ 500) = 17\ 500 \times 0,11 - 1386,55 = 538,45$ Il faut payer 538,45 € d'impôt. Notation : $B(17\ 500) = 538,45$. → 538,45 est l'image de 17 500 par B.	$R \times 0,11 - 1386,55 = 815,10$ $R \times 0,11 = 2201,65$ $R = \frac{2201,65}{0,11} = 20\ 015$ Le revenu correspondant à un montant d'impôts de 815,10 € et de 20 015. → 20 015 est l'antécédent de 815,10 par B.

❖ **Exercice :**

Le prix de l'essence sans plomb est de 1,8€ le litre. Un client veut faire le plein de sa voiture. Il compte mettre x litres dans son réservoir vide qui peut contenir 40 Litres.

On considère la fonction f qui à chaque valeur de x associe le prix à payé par le client.

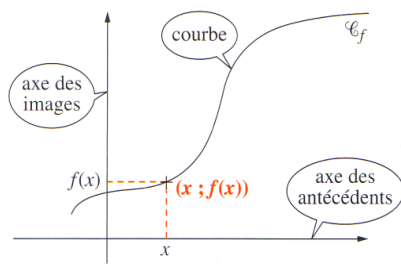
1. D'après le contexte de l'exercice, à quel intervalle x appartient-il ? En déduire l'ensemble de définition de la fonction f .

2. Déterminer l'expression algébrique de la fonction.

1. Le nombre de litres d'essence peut varier entre 5 et 40 donc $x \in [5; 40]$ ainsi $D_f = [5; 40]$

2. La fonction f est définie par la formule $f(x) = 1,8x$

II – Courbes représentatives des fonctions :



La courbe qui représente la fonction f est constituée de tous les points de coordonnées $(x; f(x))$.

Exemple : on veut tracer la courbe de la fonction définie par la formule suivante : $f(x) = 0,5x^2 - 2x - 1$

1. D'abord on construit un **tableau de valeurs** en choisissant les antécédents de son choix :

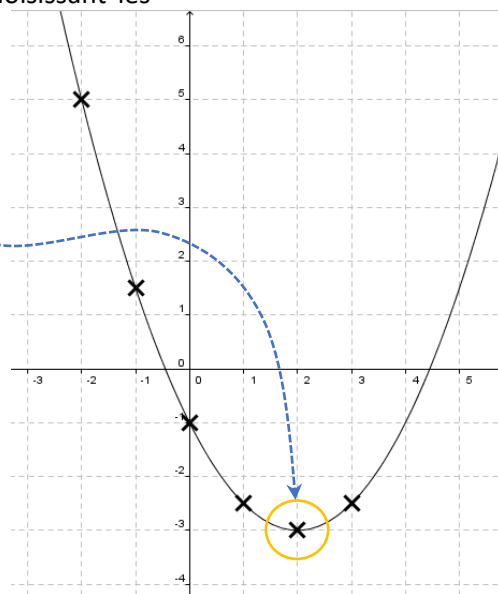
x	-3	-2	-1	0	1	2	3
$F(x)$	9,5	5	1,5	-1	-2,5	-3	-2,5

$$\rightarrow 0,5 \times (-3)^2 - 2 \times (-3) - 1$$

2. Chaque colonne du tableau donne un couple (*antécédent ; image*) qui sont les coordonnées d'un point de la courbe.

On place tous les points obtenus dans un repère bien gradué.

3. On relie « harmonieusement » les points et on obtient la **représentation graphique** de f !



4. On peut maintenant lire d'autres images ou antécédents puisque la courbe est plus complète qu'un tableau, et demande moins d'efforts qu'une formule.

□ Définitions

Soit f une fonction définie sur un ensemble D .

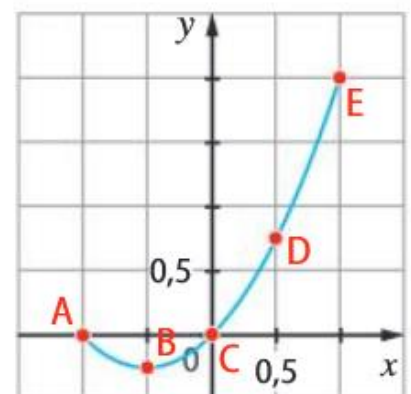
Dans le plan muni d'un repère, la courbe d'équation $y = f(x)$ est l'ensemble des points du plan dont les coordonnées $(x; y)$ vérifient la relation $y = f(x)$ avec $x \in D$.

❖ **Exemple** : Soit f la fonction définie sur $D = [-1; 1]$ par $f(x) = x^2 + x$. Sa courbe représentative est l'ensemble des points de coordonnées $(x; y)$ tels que x appartient à $[-1; 1]$ et $y = x^2 + x$.

Un tableau de valeurs permet d'obtenir des coordonnées de points :

x	-1	-0,5	0	0,5	1
$f(x)$	0	-0,25	0	0,75	2

On place les points $A(-1; 0)$, $B(-0,5; -0,25)$, $C(0; 0)$,... ainsi obtenus et on les relie par une courbe car il y a une infinité de points lorsque x décrit l'intervalle $[-1; 1]$



□ Appartenance d'un point à une courbe

Soit f une fonction définie sur un ensemble D et de courbe représentative C_f dans un repère.

Un point $M(x; y)$ appartient à C_f **si, et seulement si**, x appartient à D et $y = f(x)$.

❖ Exemples :

Soit la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x^3 + 3$

a) Le point $P(2; 11)$ et $M(1; 6)$ sont-ils des points de la courbe C_f ?

(2 et 1 appartiennent bien à $\mathbb{R}$)

On calcule $f(2) = 2^3 + 3 = 11$, $y_P = 11$ donc P appartient à C_f

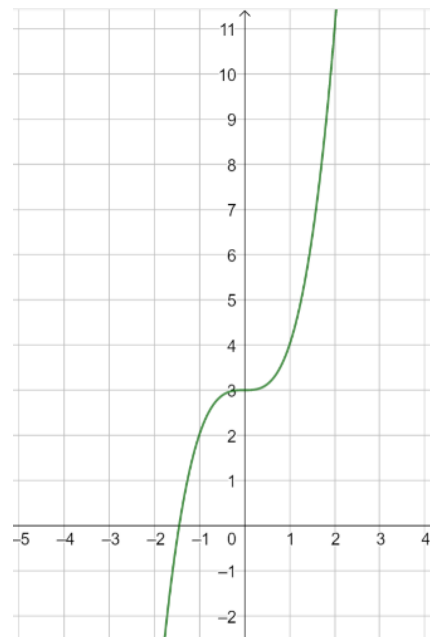
On calcule $f(1) = 1^3 + 3 = 4$, or $y_M = 4 \neq 6$ donc M n'appartient pas à C_f .

b) M est le point d'abscisse 1,5 de cette courbe. Calculer son ordonnée.

Les coordonnées de M sont $(1,5; f(1,5))$.

$f(1,5) = 1,5^3 + 3 = 6,375$

Donc l'ordonnée de M est 6,375.

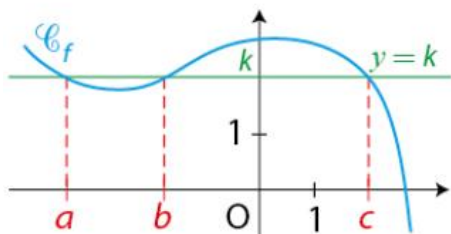


III – Résolutions graphiques :

Soit C_f et C_g les courbes respectives des fonctions f, g dans un repère.

□ Résoudre $f(x) = k$

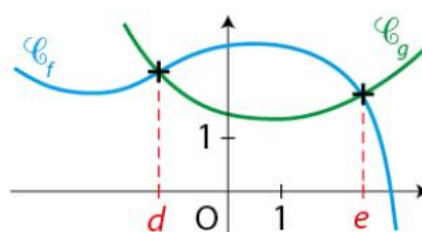
Les solutions sont les **abscisses** des points d'intersection de la droite d'équation $y = k$ et de la courbe C_f .



L'équation $f(x) = k$ a pour solutions a, b, c et peut se noter $S = \{a, b, c\}$

□ Résoudre $f(x) = g(x)$

Les solutions sont les **abscisses** des points d'intersection des courbes C_f et C_g

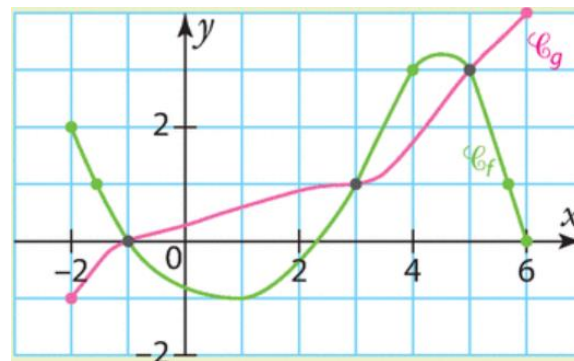


L'équation $f(x) = g(x)$ a pour solutions d et e et peut se noter $S = \{d, e\}$

Exemple :

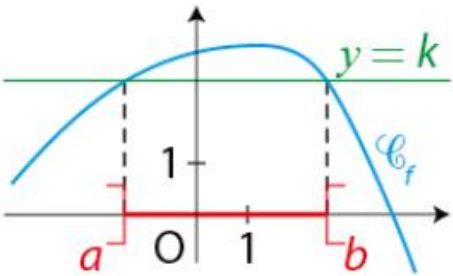
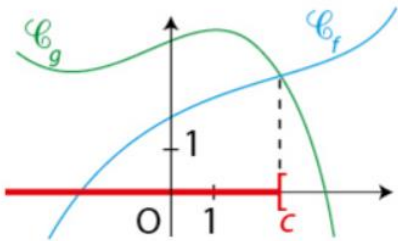
On considère deux fonctions f et g définies sur $[-2 ; 6]$ dont voici ci-contre les courbes représentatives.

- A l'aide de la courbe représentative de f , résoudre $f(x) = 3$.
- A l'aide des courbes représentatives de f et g , résoudre $f(x) = g(x)$.



a) On trace la droite d'équation $y = 3$ puis on lit les abscisses des points d'intersection de la courbe avec cette droite. Les solutions sont 4 et 5 et peut se noter $S = \{4, 5\}$.

b) On lit les abscisses des points d'intersection des deux courbes. Les solutions sont -1 ; 3 et 5 et peut se noter $S = \{-1; 3; 5\}$.

☐ Résoudre $f(x) > k$	☐ Résoudre $f(x) < g(x)$
Les solutions sont les abscisses des points de la courbe C_f situés au-dessus de la droite d'équation $y = k$.  L'ensemble solutions de l'inéquation $f(x) > k$ est l'intervalle $]a ; b[$	Les solutions sont les abscisses des points de la courbe C_f situés en-dessous de la courbe C_g.  L'ensemble solutions de l'inéquation $f(x) < g(x)$ est l'intervalle $] - \infty ; c[$

❖ Exemple :

On considère les courbes représentatives de la fonction carré, notée f , et de la fonction affine g définie sur $\mathbb{R}$ par $g(x) = x + 6$. Elles sont tracées dans le repère ci-contre.

- Résoudre graphiquement $g(x) = 8$.
- Résoudre graphiquement $f(x) \geq g(x)$.

a) On trace la droite d'équation $y = 8$ puis on lit l'abscisse du point d'intersection de la courbe avec cette droite. La solution est 2 et peut se noter $S = \{2\}$.

b) On lit les abscisses des points de la courbe C_f situés au-dessus de la courbe C_g . L'ensemble solutions de l'inéquation $f(x) \geq g(x)$ est l'intervalle $] - \infty ; -2] \cup [3 ; +\infty[$.

