MATHS 1ère EDS	Ch 7 : La trigonométrie	ENONCÉ et CORRECTION DES EXERCICES

Activité de découverte :

1 Une nouvelle mesure d'angle : le radian

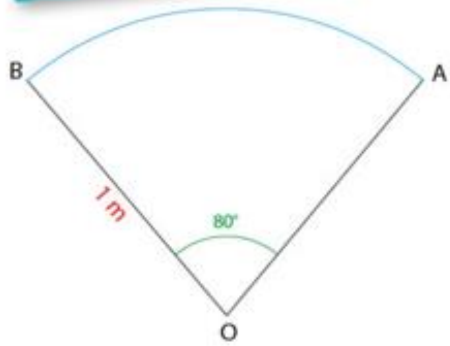
Un paysagiste souhaite installer un pont en bois pour agrémenter une piscine. La partie centrale de ce pont est un arc de cercle de rayon 1 m et d'angle au centre de mesure 80°.

Cette partie est représentée ci-dessous par l'arc $\overset{\frown}{AB}$ d'un cercle de centre O.

1 **a)** Quelle aurait été la longueur, en m, de l'arc $\overset{\frown}{AB}$ si la mesure de l'angle au centre avait été de 180° ?

b) On admet que la longueur de l'arc $\overset{\frown}{AB}$ est proportionnelle à la mesure de l'angle au centre.
En déduire la longueur, en m, de l'arc $\overset{\frown}{AB}$.
Arrondir au dixième.

2 Sur un cercle de rayon 1, la mesure en radian de l'angle au centre interceptant un arc $\overset{\frown}{AB}$ est la longueur de cet arc.
Exprimer la mesure en radian de l'angle $\widehat{AOB}$ en fonction de π.



1 Une nouvelle mesure d'angle : le radian

1 **a)** Si la mesure de l'angle est 180°, l'arc de cercle est un demi-cercle de rayon 1. Son périmètre vaut donc π m.

b) Pour un angle au centre de 180°, la longueur de l'arc $\widehat{AB}$ vaut π m. Ainsi, par proportionnalité, la longueur de l'arc $\widehat{AB}$ vaut $\dfrac{80 \times \pi}{180}$, c'est-à-dire environ 1,4 m.

2 L'angle $\widehat{AOB}$ vaut donc, en simplifiant, $\dfrac{4\pi}{9}$rad.

******************** I – CERCLE TRIGONOMÉTRIQUE – MESURE D'ANGLE**********************

17 Convertir en degré chaque mesure d'angle.

a) $\dfrac{7\pi}{9}$ rad **b)** $\dfrac{5\pi}{12}$ rad **c)** $\dfrac{3\pi}{8}$ rad **d)** $\dfrac{4\pi}{5}$ rad

18 Exprimer en radian, en fonction de π, chaque mesure d'angle.

a) 160° **b)** 70° **c)** 145° **d)** 63°

17 a) 140° b) 75° c) 67,5° d) 144°.

18 a) $\frac{8\pi}{9}$rad b) $\frac{7\pi}{18}$rad

c) $\frac{29\pi}{36}$rad d) $\frac{7\pi}{20}$rad

Exercice résolu 1 p 169

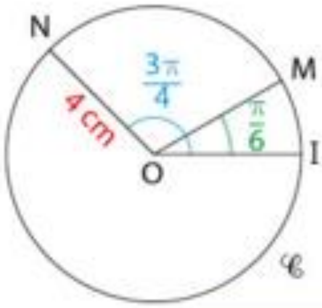
$\mathscr{C}$ est un cercle de centre O et de rayon 4 cm. Les points I, M, N du cercle sont tels que :

• $\widehat{IOM} = \frac{\pi}{6}$ rad ; • $\widehat{ION} = \frac{3\pi}{4}$ rad ; • M appartient à l'arc $\overset{\frown}{IN}$.

a) Déterminer la mesure de chacun des angles $\widehat{IOM}$ et $\widehat{ION}$ en degré puis réaliser la figure.

b) Exprimer la longueur ℓ de l'arc $\overset{\frown}{MN}$ en fonction de π.

a) La mesure de l'angle $\widehat{IOM}$ en degré est égale à $\frac{180°}{\pi} \times \frac{\pi}{6} = 30°$.
De même, la mesure de l'angle $\widehat{ION}$ en degré est égale à $\frac{180°}{\pi} \times \frac{3\pi}{4} = 135°$.



On applique la formule du cours ou bien on s'aide d'un tableau de proportionnalité.

Angle (en degré)	180°	30°
Angle (en rad)	π	$\frac{\pi}{6}$

b) $\widehat{MON} = \left(\frac{3\pi}{4} - \frac{\pi}{6}\right)$ rad $= \frac{7\pi}{12}$ rad.

Donc $\ell = 4$ cm $\times \frac{7\pi}{12}$ c'est-à-dire $\ell = \frac{7\pi}{3}$ cm.

Pour déterminer la longueur d'un arc de cercle :
• on détermine la mesure en radian de l'angle au centre qui l'intercepte ;
• on multiplie cette mesure par le rayon de l'arc.

19 Dans chaque cas, déterminer la longueur, dans l'unité indiquée, d'un arc de cercle de rayon R et d'angle au centre de mesure α. *Arrondir au centième.*

a) $R = 6$ cm et $\alpha = \dfrac{5\pi}{6}$ rad.

b) $R = 3$ m et $\alpha = \dfrac{8\pi}{7}$ rad.

c) $R = 12$ km et $\alpha = \dfrac{11\pi}{5}$ rad.

19 **a)** $\ell = 6 \times \frac{5\pi}{6} = 5\pi$ cm soit $\ell \approx 15{,}71$ cm

b) $\ell = 3 \times \frac{8\pi}{7} = \frac{24\pi}{7}$ m soit $\ell \approx 10{,}77$ m

c) $\ell = 12 \times \frac{11\pi}{5} = 26{,}4\pi$ km soit $\ell \approx 82{,}94$ km

Exercice résolu 2 p 169

$(O\,;I,J)$ est un repère orthonormé direct. Sur le cercle trigonométrique de centre O, placer les points :

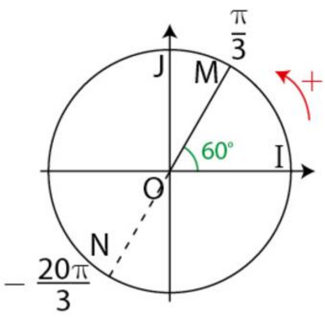
a) M image de $\frac{\pi}{3}$; **b)** N image de $-\frac{20\pi}{3}$.

a) $\widehat{IOM} = \frac{180°}{\pi} \times \frac{\pi}{3} = 60°$

b) $-\frac{20\pi}{3} = \frac{\pi}{3} - \frac{21\pi}{3} = \frac{\pi}{3} - \pi - 3 \times 2\pi$

donc $-\frac{20\pi}{3}$ et $\frac{\pi}{3} - \pi$ ont le même point image sur le cercle.

Or, $\frac{\pi}{3} - \pi$ a pour point image le symétrique de M par rapport à O.

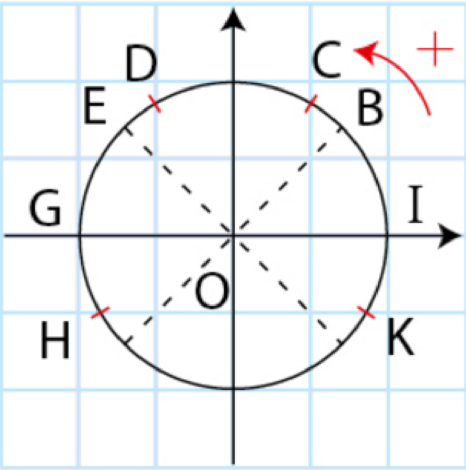


On écrit $-\frac{20\pi}{3}$ sous la forme $x + 2k\pi$ avec x dans l'intervalle $]-\pi\,;\pi]$ et $k \in \mathbb{Z}$.

Pour les exercices 37 et 38, associer à chacun des points notés sur ce cercle trigonométrique, celui des nombres réels donnés qui convient.

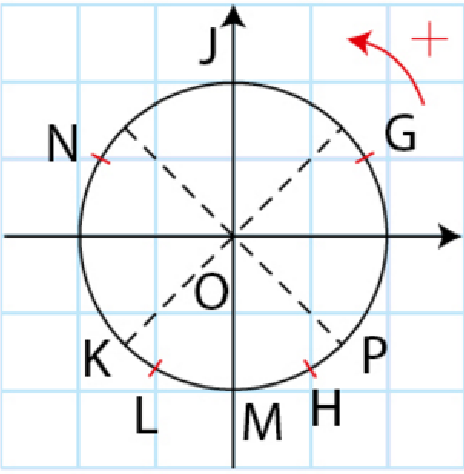
37

- $\dfrac{\pi}{3}$
- $-\dfrac{7\pi}{4}$
- $-\dfrac{13\pi}{6}$
- 2π
- 15π
- $\dfrac{7\pi}{6}$
- $\dfrac{2\pi}{3}$
- $-\dfrac{5\pi}{4}$



38

- $\dfrac{\pi}{6}$
- $\dfrac{17\pi}{6}$
- $\dfrac{5\pi}{4}$
- $-\dfrac{8\pi}{3}$
- $\dfrac{3\pi}{2}$
- $-\dfrac{11\pi}{2}$
- $\dfrac{5\pi}{3}$
- $-\dfrac{9\pi}{4}$



37 C : $\frac{\pi}{3}$; B : $-\frac{7\pi}{4}$; K : $-\frac{13\pi}{6}$; I : 2ϖ

G : 15π ; H : $\frac{7\pi}{6}$; D : $\frac{2\pi}{3}$; E : $-\frac{5\pi}{4}$

38 G : $\frac{\pi}{6}$; N : $\frac{17\pi}{6}$; K : $\frac{5\pi}{4}$; L : $-\frac{8\pi}{3}$;

M : $\frac{3\pi}{2}$; J : $-\frac{11\pi}{2}$; H : $\frac{5\pi}{3}$; P : $-\frac{9\pi}{4}$

42 **a)** Écrire le nombre réel $\frac{27\pi}{4}$ sous la forme $x + 2k\pi$, où x est un nombre de l'intervalle $]-\pi\,;\pi]$ et k un nombre de $\mathbb{Z}$.

b) En déduire un nombre réel qui a le même point image que $\frac{27\pi}{4}$ sur un cercle trigonométrique.

43 **a)** Écrire le nombre réel $-\frac{101\pi}{3}$ sous la forme $x + 2k\pi$, où x est un nombre de l'intervalle $]-\pi\,;\pi]$ et k un nombre de $\mathbb{Z}$.

b) En déduire un nombre réel qui a le même point image que $-\frac{101\pi}{3}$ sur un cercle trigonométrique.

42 **a)** $\frac{27\pi}{4} = \frac{3\pi}{4} + \frac{24\pi}{4} = \frac{3\pi}{4} + 3 \times 2\pi.$

b) $\frac{3\pi}{4}$ a donc le même point image que le nombre réel $\frac{27\pi}{4}$.

43 **a)** $-\frac{101\pi}{3} = \frac{\pi}{3} - \frac{102\pi}{3} = \frac{\pi}{3} - 17 \times 2\pi$

b) $\frac{\pi}{3}$ a donc le même point image que le nombre réel $-\frac{101\pi}{3}$.

45 Dans chaque cas, écrire deux nombres réels qui ont le même point image sur un cercle trigonométrique que le nombre donné.

a) $-\frac{\pi}{4}$ **b)** $\frac{3\pi}{2}$ **c)** $-\frac{5\pi}{6}$ **d)** $\frac{\pi}{3}$

46 **Algo** Voici une fonction Mpi écrite en langage Python. Elle a pour paramètres deux nombres réels a et b et renvoie soit la chaîne de caractères "oui", soit la chaîne de caractères "non".

```python
from math import *

def Mpi(a,b):
    d=(b-a)/pi
    if d%2==0:
        rep="oui"
    else:
        rep="non"
    return rep
```

a) Quelle est la chaîne renvoyée par Mpi (pi/3, 7*pi/3) ?

b) Que peut-on dire des points images associés aux nombres réels a et b lorsque la fonction renvoie la chaîne "oui" ?

c) Modifier les chaînes de caractères "oui" et "non" afin qu'un utilisateur comprenne le rôle de cette fonction.

45 **a)** $\frac{7\pi}{4}$; $-\frac{9\pi}{4}$

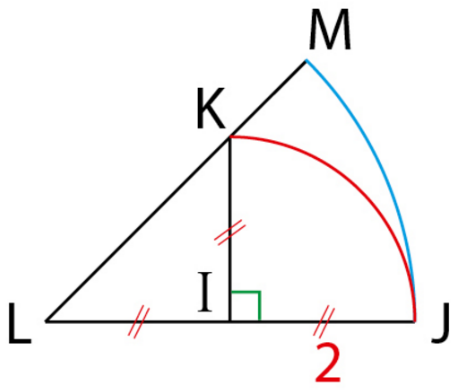
b) $-\frac{\pi}{2}$; $\frac{7\pi}{2}$

c) $\frac{7\pi}{6}$; $\frac{19\pi}{6}$

d) $-\frac{5\pi}{3}$; $\frac{7\pi}{3}$.

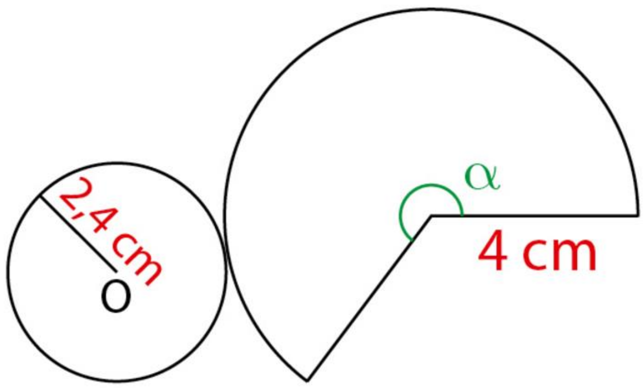
46 **a)** La commande Mpi(pi/3, 7*pi/3) renvoie « oui ».
b) Les points sont les mêmes.
c) On remplace « Oui » par : « Les nombres réels *a* et *b* ont le même point image sur un cercle trigonométrique ».
On remplace « Non » par : « Les nombres réels *a* et *b* n'ont pas le même point image sur un cercle trigonométrique ».

94 Rémi s'amuse à réaliser des effets d'optique. En voici un ci-contre : l'arc de cercle rouge a pour centre I et l'arc de cercle bleu a pour centre L.



Déterminer lequel de ces deux arcs est le plus long.

95 Voici le patron d'un cône de révolution. La base est un disque de rayon 2,4 cm et une génératrice mesure 4 cm.



a) Déterminer le périmètre du disque de base.

b) En déduire la mesure en radian de l'angle α.

94 • Arc rouge :

$$\ell_1 = 2 \times \frac{\pi}{2} = \pi$$

• Arc bleu :

$$\ell_2 = 4 \times \frac{\pi}{4} = \pi$$

Les deux arcs sont de même longueur.

95 **a)** Le périmètre de la base est $2 \times 2{,}4 \times \pi$ soit $4{,}8\pi$ cm.

b) Ainsi $4{,}8\pi = 4 \times \alpha$ d'où $\alpha = 1{,}2\pi$ rad.

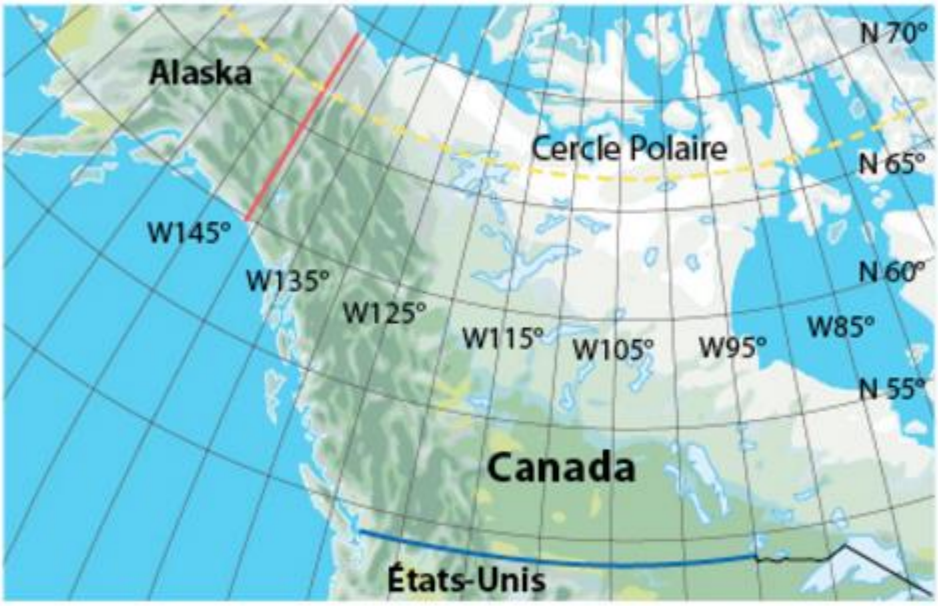
120 Déterminer la longueur d'une frontière

Chercher **Raisonner**

1. La frontière entre le Canada et l'Alaska est formée par le 141^e méridien Ouest, en rouge sur le document.

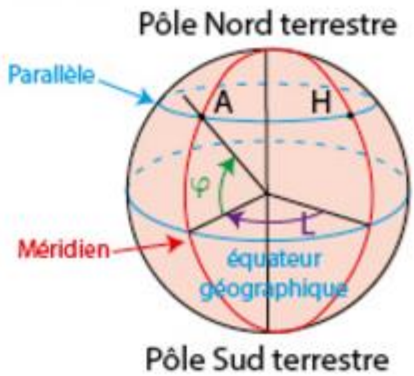
a) Par lecture sur le document, estimer combien de degrés séparent les extrémités de cette frontière.

b) Le rayon de la Terre est de 6 371 km.
Estimer la longueur, en km, de cette frontière.
Arrondir à l'unité.



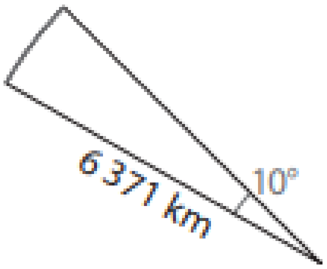
2. La frontière entre le Canada et les États-Unis est également formée en partie par le 49^e parallèle Nord, en bleu sur le document précédent.

Sur la figure ci-contre, φ représente la latitude. Le 49^e parallèle Nord correspond donc à $\varphi = 49°$. Estimer alors la longueur AH, en km, de cette frontière.
Arrondir à l'unité.



120 **1. a)** 10° degrés séparent les extrémités de cette frontière.

b)



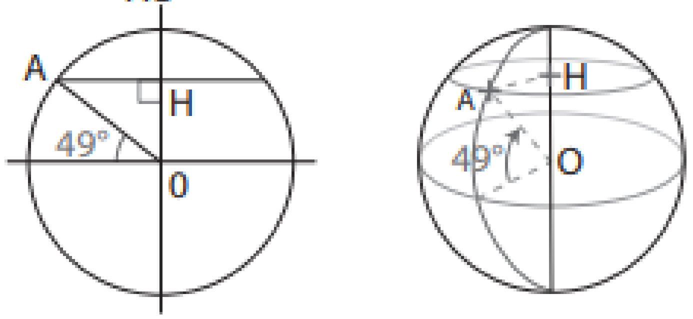
La frontière a une longueur égale à :

$$\ell_1 = 6\,371 \times \frac{\pi \times 10}{180}$$

$$= \frac{6\,371}{18}\pi \text{ km soit } \ell_1 \approx 2\,002 \text{ km}$$

2. • Déterminons le rayon HA du 49° parallèle.

$$\sin(\widehat{AOH}) = \frac{AH}{AO} \text{ donc } AH = 6\,371 \times \sin(41°) \text{ km}$$



• Ensuite, le document permet d'estimer les degrés séparant les extrémités de la frontière, on lit $123° - 95° = 28°$.

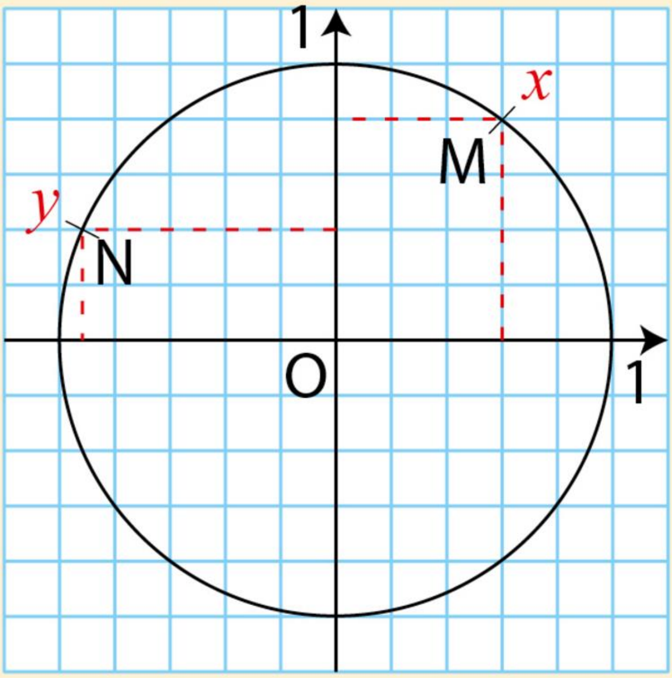
La longueur de cette frontière est donc égale à

$$\ell_2 = AH \times \frac{\pi \times 28}{180} \text{ soit}$$

$$\ell_2 = 6\,371 \times \sin(41°) \times \frac{\pi \times 28}{180} \text{ km}$$

On a donc $\ell_2 \approx 2\,043$ km.

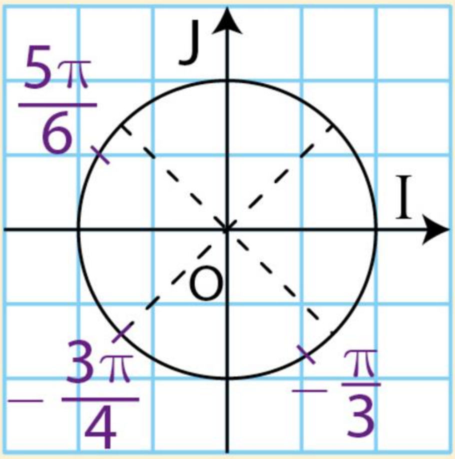
48 x et y désignent deux nombres réels associés respectivement aux points M et N du cercle trigonométrique ci-contre.



a) Lire $\cos(x)$ et $\sin(x)$.

b) Lire $\sin(y)$ et une valeur approchée de $\cos(y)$.

49 Déterminer mentalement les valeurs exactes du cosinus et sinus de :



a) $-\dfrac{\pi}{3}$ **b)** $\dfrac{5\pi}{6}$ **c)** $-\dfrac{3\pi}{4}$

50 Avec la calculatrice en mode radian, donner l’arrondi au centième du cosinus et du sinus de :

a) $\dfrac{\pi}{5}$ **b)** $\dfrac{\pi}{12}$ **c)** $-\dfrac{3\pi}{7}$ **d)** $-\dfrac{19\pi}{8}$

48 **a)** $\cos(x) = 0{,}6$; $\sin(x) = 0{,}8$.

b) $\sin(y) = 0{,}4$; $\cos(y) \approx -0{,}9$.

49 **a)** $\cos\left(-\frac{\pi}{3}\right) = \frac{1}{2}$; $\sin\left(-\frac{\pi}{3}\right) = -\frac{\sqrt{3}}{2}$

b) $\cos\left(\frac{5\pi}{6}\right) = -\frac{\sqrt{3}}{2}$; $\sin\left(\frac{5\pi}{6}\right) = \frac{1}{2}$

c) $\cos\left(-\frac{3\pi}{4}\right) = -\frac{\sqrt{2}}{2}$; $\sin\left(-\frac{3\pi}{4}\right) = -\frac{\sqrt{2}}{2}$

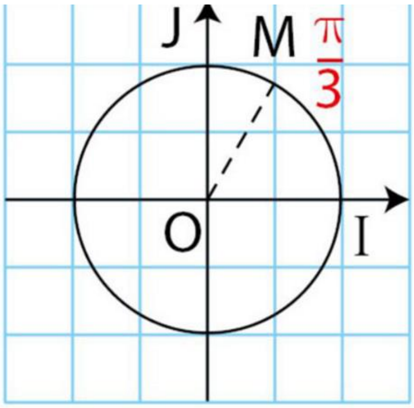
50 **a)** $\cos\left(\frac{\pi}{5}\right) \approx 0{,}81$; $\sin\left(\frac{\pi}{5}\right) \approx 0{,}59$

b) $\cos\left(\frac{\pi}{12}\right) \approx 0{,}97$; $\sin\left(\frac{\pi}{12}\right) \approx 0{,}26$

c) $\cos\left(-\frac{3\pi}{7}\right) \approx 0{,}22$; $\sin\left(-\frac{3\pi}{7}\right) \approx -0{,}97$

d) $\cos\left(-\frac{19\pi}{8}\right) \approx 0{,}38$; $\sin\left(-\frac{19\pi}{8}\right) \approx -0{,}92$

52 **a)** Réaliser cette figure et placer les points images de $\frac{2\pi}{3}$, $\frac{5\pi}{3}$, $-\frac{2\pi}{3}$, $-\frac{11\pi}{3}$.



b) En déduire les valeurs exactes des cosinus et sinus des nombres réels précédents.

60 Dans chaque cas, déterminer, s'ils existent, le ou les nombres réels x tels que :

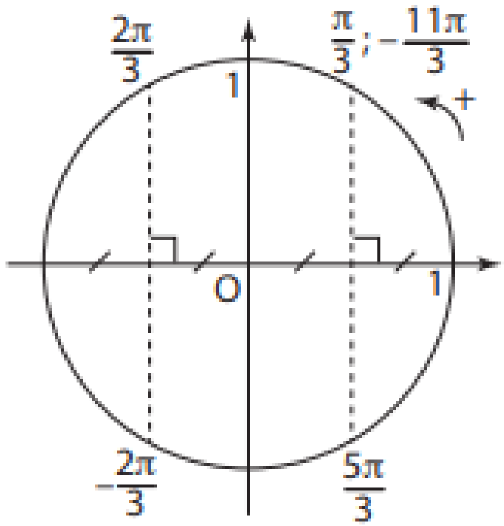
a) $\cos(x) = \frac{1}{2}$ et $x \in \left[0 ; \frac{\pi}{2}\right]$;

b) $\sin(x) = \frac{\sqrt{2}}{2}$ et $x \in \left[\frac{\pi}{2} ; \pi\right]$;

c) $\sin(x) = -\frac{1}{2}$ et $x \in [-\pi ; 0]$;

d) $\cos(x) = -\frac{\sqrt{3}}{2}$ et $x \in \left[-\pi ; -\frac{\pi}{2}\right]$.

52 **a)**



b) $\cos\left(-\frac{2\pi}{3}\right) = -\frac{1}{2}$; $\sin\left(-\frac{2\pi}{3}\right) = -\frac{\sqrt{3}}{2}$

$\cos\left(\frac{5\pi}{3}\right) = \frac{1}{2}$; $\sin\left(\frac{5\pi}{3}\right) = -\frac{\sqrt{3}}{2}$

$\cos\left(\frac{2\pi}{3}\right) = -\frac{1}{2}$; $\sin\left(\frac{2\pi}{3}\right) = \frac{\sqrt{3}}{2}$

$\cos\left(-\frac{11\pi}{3}\right) = \frac{1}{2}$; $\sin\left(-\frac{11\pi}{3}\right) = \frac{\sqrt{3}}{2}$

60 **a)** $\frac{\pi}{3}$ **b)** $\frac{3\pi}{4}$ **c)** $-\frac{\pi}{6}$ et $-\frac{5\pi}{6}$ **d)** $-\frac{5\pi}{6}$

105 **a)** Dans un repère orthonormé d'origine O, placer les points T, I, G et R de coordonnées respectives :

$$\left(\frac{\sqrt{3}}{2} ; \frac{1}{2}\right), \left(-\frac{\sqrt{3}}{2} ; -\frac{1}{2}\right), \left(-\frac{1}{2} ; \frac{\sqrt{3}}{2}\right), \left(\frac{1}{2} ; -\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$$

b) Déterminer la mesure, en radian, de l'angle $\widehat{GOT}$.

c) En déduire la nature du quadrilatère TRIG.

122 Déterminer une hauteur

Raisonner **Calculer**

Ed voit du haut de son rocher un bateau de 7 m de long sous les angles décrits sur la figure suivante.

À quelle hauteur AB se situe Ed ? Préciser la valeur exacte, en m, puis l'arrondi au centième.

126 Calculer une distance

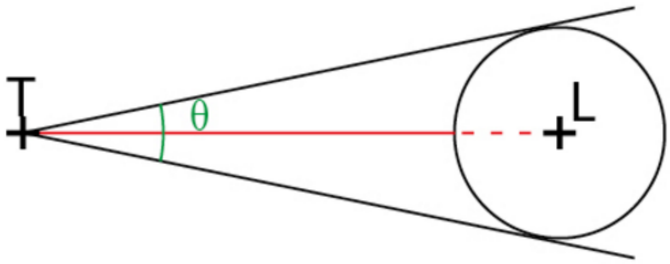
Représenter **Calculer**

On donne les informations suivantes :

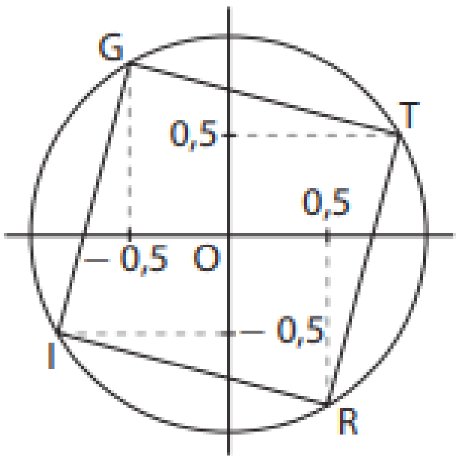
- d'un point T de la Terre, la Lune est vue sous un angle $\theta = 31{,}06'$ (environ 0,5°) ;
- le rayon de la Terre est égal à 6 371 km ;
- le rayon de la Lune est égal aux $\frac{3}{11}$ du rayon de la Terre.

Déterminer la distance TL, en km, entre la Terre et la Lune.

Arrondir à l'unité.



105 **a)**



b) $\widehat{GOT} = \frac{2\pi}{3} - \frac{\pi}{6} = \frac{\pi}{2}$ rad

c) TRIG est un quadrilatère dont les diagonales se coupent en leur milieu O, sont de même longueur 2 et sont perpendiculaires. TRIG est donc un carré.

122 On a $\tan(45°) = \dfrac{BC}{AB}$ et $\tan(60°) = \dfrac{BD}{AB}$

Ainsi $AB\tan(45°) = BC = BD - 7 = AB\tan(60°) - 7$

donc $AB(\tan(45°) - \tan(60°)) = -7$

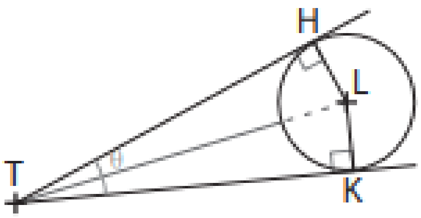
soit $AB = \dfrac{7}{\tan(60°) - \tan(45°)}$

or $\tan(60°) = \dfrac{\sin(60°)}{\cos(60°)} = \sqrt{3}$

et $\tan(45°) = \dfrac{\sin(45°)}{\cos(45°)} = 1$

donc $AB = \dfrac{7}{\sqrt{3} - 1} \approx 9{,}56$ m

126



La tangente (TH) au cercle issue de T est perpendiculaire au rayon [HL]. Ainsi le triangle THL est rectangle en H.

Les triangles THL et TKL ont deux côtés respectivement égaux et sont rectangles. D'après le théorème de Pythagore, ils ont donc trois côtés respectivement égaux et sont alors isométriques.

Ainsi $\widehat{HTL} = \widehat{LTK} = \dfrac{\theta}{2}$

Ainsi, $\sin\left(\dfrac{\theta}{2}\right) = \dfrac{HL}{TL}$ donc $TL = \dfrac{HL}{\sin\left(\dfrac{\theta}{2}\right)}$

Questions flash

65 On donne $\cos(x)=\dfrac{\sqrt{5}}{7}$.

Déterminer mentalement $\cos^2(x)$.

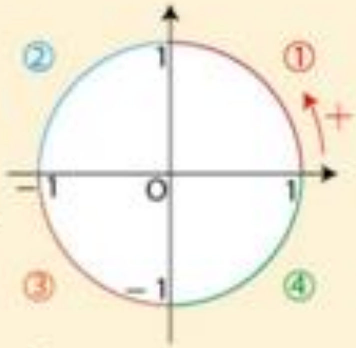
66 On donne $\cos^2(x)=\dfrac{1}{3}$.

Romain affirme : « Alors, $\sin^2(x)=\dfrac{2}{3}$. »
A-t-il raison ?

67 On donne $\sin(x)=\dfrac{1}{2}$. Parmi les valeurs suivantes, quelle est celle de $\cos^2(x)$?

(1) $\dfrac{1}{2}$ **(2)** $\dfrac{1}{4}$ **(3)** $\dfrac{3}{4}$

68 Associer oralement chaque nombre ci-dessous au quart de cercle auquel appartient son point image. Préciser le signe de son cosinus, puis de son sinus.



- $\dfrac{3\pi}{4}$
- $-\dfrac{7\pi}{12}$
- $\dfrac{\pi}{9}$
- $-\dfrac{\pi}{3}$

69 Préciser le signe du nombre donné.

a) $\sin\left(\dfrac{5\pi}{7}\right)$ **b)** $\cos\left(-\dfrac{3\pi}{4}\right)$ **c)** $\sin\left(\dfrac{13\pi}{5}\right)$

70 x désigne un nombre réel tel que $\cos(x)=-\dfrac{3}{5}$ avec $x\in[0\,;\pi]$. Déterminer la valeur de $\sin(x)$.

71 x désigne un nombre réel tel que $\sin(x)=\dfrac{1}{3}$ avec $x\in\left[\dfrac{\pi}{2}\,;\pi\right]$. Déterminer la valeur de $\cos(x)$.

65 $\cos^2(x) = \frac{5}{49}$

66 Romain a raison. En effet, pour tout nombre réel x, $\cos^2(x) + \sin^2(x) = 1$.

Ainsi $\sin^2(x) = 1 - \cos^2(x) = 1 - \frac{1}{3} = \frac{2}{3}$.

67 Réponse **(3)**. En effet,

$\cos^2(x) = 1 - \sin^2(x) = 1 - \left(\frac{1}{2}\right)^2 = \frac{3}{4}$

68 • $\frac{3\pi}{4}$: ②

$\cos\left(\frac{3\pi}{4}\right) < 0$ et $\sin\left(\frac{3\pi}{4}\right) > 0$

• $-\frac{7\pi}{12}$: ③

$\cos\left(-\frac{7\pi}{12}\right) < 0$ et $\sin\left(-\frac{7\pi}{12}\right) < 0$

• $\frac{\pi}{9}$: ①

$\cos\left(\frac{\pi}{9}\right) > 0$ et $\sin\left(\frac{\pi}{9}\right) > 0$

• $-\frac{\pi}{3}$: ④

$\cos\left(-\frac{\pi}{3}\right) > 0$ et $\sin\left(-\frac{\pi}{3}\right) < 0$

69 $\sin\left(\frac{5\pi}{7}\right) > 0$

$\cos\left(-\frac{3\pi}{4}\right) < 0$

$\sin\left(\frac{13\pi}{5}\right) > 0$

70 Pour tout nombre réel x, $\cos^2(x) + \sin^2(x) = 1$.

Ainsi, $\sin^2(x) = 1 - \left(-\frac{3}{5}\right)^2 = \frac{16}{25}$ soit $\sin(x) = \frac{4}{5}$ ou $\sin(x) = -\frac{4}{5}$.

Or $x \in [0\,;\pi]$ donc $\sin(x) \geqslant 0$. Ainsi $\sin(x) = \frac{4}{5}$.

71 Pour tout nombre réel x, $\cos^2(x)+\sin^2(x)=1$.

Ainsi, $\cos^2(x)=1-\left(\frac{1}{3}\right)^2=\frac{8}{9}$ soit $\cos(x)=\frac{\sqrt{8}}{3}$ ou $\cos(x)=-\frac{\sqrt{8}}{3}$.

Or $x\in\left[\frac{\pi}{2}\,;\pi\right]$ donc $\cos(x)\leqslant 0$. Ainsi $\cos(x)=-\frac{\sqrt{8}}{3}$.

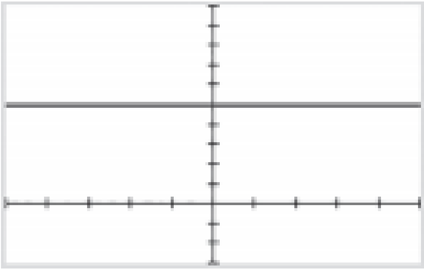
90 Établir une égalité

a) Afficher à l'écran de la calculatrice la courbe représentative de la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x)=(\cos(x)+2\sin(x))^2+(2\cos(x)-\sin(x))^2$$

b) Émettre une conjecture à partir de cette observation et la démontrer.

90 a)



b) On peut émettre la conjecture
pour tout nombre réel x,
$(\cos(x)+2\sin(x))^2+(2\cos(x)-\sin(x))^2=5$

En effet, $(\cos(x)+2\sin(x))^2+(2\cos(x)-\sin(x))^2$

$$=\cos^2(x)+4\cos(x)\sin(x))+4\sin^2(x)$$
$$+4\cos^2(x)-4\cos(x)\sin(x)+\sin^2(x)$$
$$=5\cos^2(x)+5\sin^2(x)$$
$$=5(\cos^2(x)+\sin^2(x))$$
$$=5\times1=5$$

******************** IV – FONCTION ET SINUS *********************

Exercice 18 à 20 p 194

Pour les exercices 18 à 20, en s'aidant de la courbe de la fonction sinus, résoudre l'équation dans :

a) $[0\,;\pi]$ **b)** $[-\pi\,;\pi]$ **c)** $[\pi\,;3\pi]$ **d)** $\mathbb{R}$

18 $\sin(x)=0{,}5$

19 $1+2\sin(x)=0$

20 $-4\sin(t)+2\sqrt{3}=0$

18 **a)** Dans $[0\,;\pi]$, $\sin(x)=0{,}5$ équivaut à $x=\dfrac{\pi}{6}$ ou $x=\dfrac{5\pi}{6}$.

L'ensemble des solutions est $\mathcal{S}=\left\{\dfrac{\pi}{6}\,;\dfrac{5\pi}{6}\right\}$.

b) Dans $[-\pi\,;\pi]$, $\sin(x)=0{,}5$ équivaut à $x=\dfrac{\pi}{6}$ ou $x=\dfrac{5\pi}{6}$.

L'ensemble des solutions est $\mathcal{S}=\left\{\dfrac{\pi}{6}\,;\dfrac{5\pi}{6}\right\}$.

c) $\dfrac{\pi}{6}+2\pi=\dfrac{13\pi}{6}$ et $\dfrac{5\pi}{6}+2\pi=\dfrac{17\pi}{6}$

On utilise le fait que sin est de période 2π. L'ensemble des solutions est $\mathcal{S}=\left\{\dfrac{13\pi}{6}\,;\dfrac{17\pi}{6}\right\}$.

d) Dans $\mathbb{R}$, $\sin(x)=0{,}5$ équivaut à $x=\dfrac{\pi}{6}+k2\pi$ ou $x=\dfrac{5\pi}{6}+k2\pi$ avec $k\in\mathbb{Z}$.

L'ensemble des solutions est :

$$\mathcal{S}=\left\{\frac{\pi}{6}+k2\pi\,;\frac{5\pi}{6}+k2\pi\right\}\text{ avec } k\in\mathbb{Z}.$$

19 **a)** Dans $[0\,;\pi]$, $1+2\sin(x)=0$ équivaut à $\sin(x)=-0{,}5$.

Or sur $[0\,;\pi]$, $\sin(x)\geqslant 0$ donc l'équation n'a pas de solution.

L'ensemble des solutions est $\mathcal{S}=\varnothing$.

b) Dans $[-\pi\,;\pi]$, $\sin(x)=-0{,}5$ équivaut à $x=-\dfrac{5\pi}{6}$ ou $x=-\dfrac{\pi}{6}$.

L'ensemble des solutions est $\mathcal{S}=\left\{-\dfrac{5\pi}{6}\,;-\dfrac{\pi}{6}\right\}$.

c) $-\dfrac{5\pi}{6}+2\pi=\dfrac{7\pi}{6}$ et $-\dfrac{\pi}{6}+2\pi=\dfrac{11\pi}{6}$.

On utilise le fait que la fonction sin est périodique de période 2π.

L'ensemble des solutions est $\mathcal{S}=\left\{\dfrac{7\pi}{6}\,;\dfrac{11\pi}{6}\right\}$.

d) Dans $\mathbb{R}$, $\sin(x)=-0{,}5$ équivaut à $x=-\dfrac{5\pi}{6}+k2\pi$ ou $x=-\dfrac{\pi}{6}+k2\pi$ avec $k\in\mathbb{Z}$.

L'ensemble des solutions est :

$$\mathcal{S}=\left\{-\frac{5\pi}{6}+k2\pi\,;-\frac{\pi}{6}+k2\pi\right\}\ k\in\mathbb{Z}.$$

20 **a)** Dans $[0\,;\pi]$, $-4\sin(t)+2\sqrt{3}=0$ équivaut à $\sin(t)=\dfrac{\sqrt{3}}{2}$ équivaut à $x=\dfrac{\pi}{3}$ ou $x=\dfrac{2\pi}{3}$.

L'ensemble des solutions est $\mathcal{S}=\left\{\dfrac{\pi}{3}\,;\dfrac{2\pi}{3}\right\}$.

b) Dans $[-\pi\,;\pi]$, $\sin(t)=\dfrac{\sqrt{3}}{2}$ équivaut à $x=\dfrac{\pi}{3}$ ou $x=\dfrac{2\pi}{3}$.

L'ensemble des solutions est $\mathcal{S}=\left\{\dfrac{\pi}{3}\,;\dfrac{2\pi}{3}\right\}$.

c) $\dfrac{\pi}{3}+2\pi=\dfrac{7\pi}{3}$ et $\dfrac{2\pi}{3}+2\pi=\dfrac{8\pi}{3}$.

On utilise le fait que la fonction sin est périodique de période 2π.

L'ensemble des solutions est $\mathcal{S}=\left\{\dfrac{7\pi}{3}\,;\dfrac{8\pi}{3}\right\}$.

d) Dans $\mathbb{R}$, $\sin(x)=\dfrac{\sqrt{3}}{2}$ équivaut à $x=\dfrac{\pi}{3}+k2\pi$ ou $x=\dfrac{2\pi}{3}+k2\pi$, avec $k\in\mathbb{Z}$.

L'ensemble des solutions est :

$\mathcal{S}=\left\{\dfrac{\pi}{3}+k2\pi\,;\dfrac{2\pi}{3}+k2\pi\right\}$ avec $k\in\mathbb{Z}$.

Exercice 34 ; 35 p 195

Pour les exercices 34 et 35, en s'aidant de la courbe de la fonction cosinus, résoudre l'équation dans :

a) $[0\,;\pi]$ **b)** $[-\pi\,;\pi]$ **c)** $[\pi\,;3\pi]$ **d)** $\mathbb{R}$

34 $\cos(x) = \dfrac{\sqrt{2}}{2}$

35 $\sqrt{3} + 2\cos(x) = 0$

34 a) Dans $[0\,;\pi]$, $\cos(x) = \dfrac{\sqrt{2}}{2}$ équivaut à $x = \dfrac{\pi}{4}$.

L'ensemble des solutions est $\mathcal{S} = \left\{\dfrac{\pi}{4}\right\}$.

b) La fonction cos est paire donc dans $[-\pi\,;\pi]$,

$\cos(x) = \dfrac{\sqrt{2}}{2}$ équivaut à $x = \dfrac{\pi}{4}$ ou $x = -\dfrac{\pi}{4}$.

L'ensemble des solutions est $\mathcal{S} = \left\{-\dfrac{\pi}{4}\,;\dfrac{\pi}{4}\right\}$.

c) $-\dfrac{\pi}{4} + 2\pi = \dfrac{7\pi}{4}$ et $\dfrac{\pi}{4} + 2\pi = \dfrac{9\pi}{4}$

On utilise le fait que cos a pour période 2π.

L'ensemble des solutions est $\mathcal{S} = \left\{\frac{7\pi}{4} ; \frac{9\pi}{4}\right\}$.

d) Dans $\mathbb{R}$, $\cos(x) = \frac{\sqrt{2}}{2}$ équivaut à $x = \frac{\pi}{4} + k2\pi$ ou $x = -\frac{\pi}{4} + k2\pi$ avec $k \in \mathbb{Z}$.

L'ensemble des solutions est :

$$\mathcal{S} = \left\{\frac{\pi}{4} + k2\pi ; -\frac{\pi}{4} + k2\pi\right\} \text{ avec } k \in \mathbb{Z}.$$

35 **a)** Dans $[0 ; \pi]$, $\sqrt{3} + 2\cos(x) = 0$ équivaut à $\cos(x) = -\frac{\sqrt{3}}{2}$ équivaut à $x = \frac{5\pi}{6}$

L'ensemble des solutions est $\mathcal{S} = \left\{\frac{5\pi}{6}\right\}$.

b) La fonction cos est paire donc dans $[-\pi ; \pi]$, $\cos(x) = -\frac{\sqrt{3}}{2}$ équivaut à $x = \frac{5\pi}{6}$ ou $x = -\frac{5\pi}{6}$.

L'ensemble des solutions est $\mathcal{S} = \left\{-\frac{5\pi}{6} ; \frac{5\pi}{6}\right\}$.

c) $\frac{5\pi}{6} + 2\pi = \frac{17\pi}{6}$ et $-\frac{5\pi}{6} + 2\pi = \frac{7\pi}{6}$.

On utilise le fait que cos a pour période 2π.

L'ensemble des solutions est $\mathcal{S} = \left\{\frac{7\pi}{6} ; \frac{17\pi}{6}\right\}$.

d) Dans $\mathbb{R}$, $\cos(x) = -\frac{\sqrt{3}}{2}$ équivaut à $x = \frac{5\pi}{6} + k2\pi$ ou $x = -\frac{5\pi}{6} + k2\pi$, $k \in \mathbb{Z}$.

L'ensemble des solutions est :

$$\mathcal{S} = \left\{\frac{5\pi}{6} + k2\pi ; -\frac{5\pi}{6} + k2\pi\right\} \; k \in \mathbb{Z}.$$

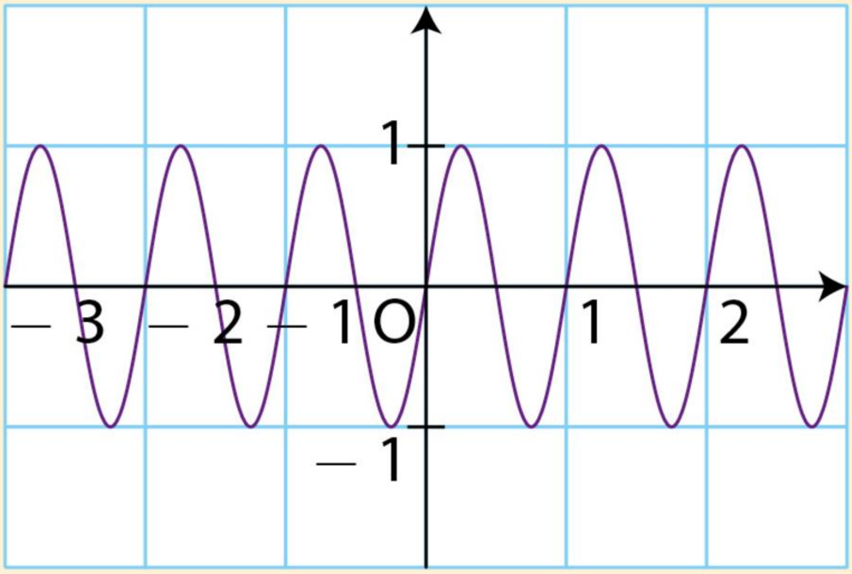
<u>Exercice 5 à 8 p 193</u>

5 Donner la valeur exacte de :

a) $\sin\left(\frac{\pi}{6}\right)$ **b)** $\sin\left(\frac{\pi}{4}\right)$ **c)** $\sin\left(\frac{\pi}{2}\right)$ **d)** $\sin(\pi)$

6 Julie affirme : « Pour tout nombre réel x, $\sin(x + 9\pi) = \sin(x)$. »
A-t-elle raison ?

7 Voici une sinusoïde représentant une fonction f.



Conjecturer la parité et la période de f.

8 f est la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x) = -\sin(x)$$

Laquelle de ces affirmations est exacte ?

(1) f est croissante sur $\left[0 ; \frac{\pi}{2}\right]$.

(2) f est décroissante sur $\left[-\frac{\pi}{2} ; 0\right]$.

(3) f est croissante sur $\left[0 ; \frac{\pi}{4}\right]$ et décroissante sur $\left[\frac{3\pi}{2} ; 2\pi\right]$.

5 a) $\sin\left(\dfrac{\pi}{6}\right) = \dfrac{1}{2}$ b) $\sin\left(\dfrac{\pi}{4}\right) = \dfrac{\sqrt{2}}{2}$

c) $\sin\left(\dfrac{\pi}{2}\right) = 1$ d) $\sin(\pi) = 0$

6 Pour tout nombre réel x,

$$\sin(x + 9\pi) = \sin(x + \pi + 4 \times 2\pi) = \sin(x + \pi) = -\sin(x).$$

Julie n'a donc pas raison.

7 On conjecture que la fonction f est impaire et périodique de période 1.

8 La fonction sinus est croissante sur l'intervalle $\left[-\dfrac{\pi}{2} ; 0\right]$ donc f est décroissante sur $\left[-\dfrac{\pi}{2} ; 0\right]$.

L'affirmation (2) est donc exacte.

Exercice 21 p 194

21 f est la fonction sinus.

1. Rappeler le sens de variation de la fonction f sur l'intervalle $[0 ; \pi]$.

2. a) Quelle propriété (parité ou périodicité) permet d'obtenir à partir de la question **1.** le sens de variation de la fonction f sur l'intervalle :

- $[-\pi ; \pi]$?
- $[2\pi ; 3\pi]$?
- $\left[-2\pi ; -\dfrac{3\pi}{2}\right]$?

b) Dresser le tableau de variations de f sur chacun des intervalles précédents.

21 **1.** La fonction sinus est croissante sur $\left[0\,;\,\frac{\pi}{2}\right]$ et décroissante sur $\left[\frac{\pi}{2}\,;\,\pi\right]$.

2. a) • L'intervalle $[-\pi\,;\,\pi]$ est symétrique par rapport à O donc c'est la parité qui permet d'obtenir le sens de variations de *f* sur $[-\pi\,;\,\pi]$

• $0+2\pi=2\pi$ et $\pi+2\pi=3\pi$

C'est la périodicité qui permet d'obtenir le sens de variations de *f* sur $[2\pi\,;\,3\pi]$

• $0-2\pi=-2\pi$ et $\frac{\pi}{2}-2\pi=-\frac{3\pi}{2}$

C'est la périodicité qui permet d'obtenir le sens de variations de *f* sur $[-4\pi\,;\,-3\pi]$

b)

x	$-\pi$		$-\frac{\pi}{2}$		0		$\frac{\pi}{2}$		π
$f(x)$	0	$\searrow$	-1	$\nearrow$	0	$\nearrow$	1	$\searrow$	0

x	2π		$\frac{5\pi}{2}$		3π
$f(x)$	0	$\nearrow$	1	$\searrow$	0

x	-2π		$-\frac{3\pi}{2}$
$f(x)$	0	$\nearrow$	1

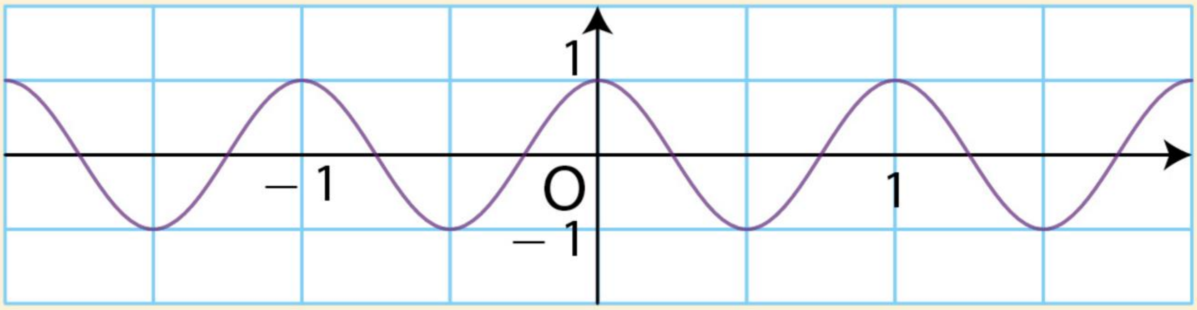
<u>Exercice 23 à 26 p 194</u>

23 Donner la valeur exacte de :

a) $\cos\left(\frac{\pi}{3}\right)$ **b)** $\cos\left(\frac{\pi}{4}\right)$ **c)** $\cos\left(\frac{\pi}{2}\right)$ **d)** $\cos(\pi)$

24 Fiona affirme : « Pour tout nombre réel x,
$$\cos(x + 10\pi) = \cos(x).$$ »
Que peut-on en penser ?

25 Voici une sinusoïde représentant une fonction f.



Conjecturer la parité et la période de f.

26 f est la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par :
$$f(x) = \cos(x)$$
Laquelle de ces affirmations est exacte ?

(1) f est croissante sur $[0 ; \pi]$.

(2) f est décroissante sur $\left[\frac{\pi}{2} ; \frac{3\pi}{2}\right]$.

(3) f est croissante sur $\left[-\pi ; -\frac{\pi}{2}\right]$ et sur $\left[\pi ; \frac{3\pi}{2}\right]$.

23 **a)** $\cos\left(\frac{\pi}{3}\right) = \frac{1}{2}$ **b)** $\cos\left(\frac{\pi}{4}\right) = \frac{\sqrt{2}}{2}$

c) $\cos\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0$ **d)** $\cos(\pi) = -1$.

24 Pour tout nombre réel x,
$\cos(x + 10\pi) = \cos(x + 5 \times 2\pi) = \cos(x)$ car la fonction cos a pour période 2π.
Fiona a donc raison.

25 On peut conjecturer que *f* est paire et de période 1.

26 (3) *f* est croissante sur $\left[-\pi\,;\,-\frac{\pi}{2}\right]$ et croissante sur $\left[\pi\,;\,\frac{3\pi}{2}\right]$.

36 *f* est la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x) = \cos(x)$$

1. Rappeler le sens de variation de la fonction *f* sur l'intervalle $[0\,;\,2\pi]$.

2. a) Quelle propriété (parité ou périodicité) permet d'obtenir à partir de la question **1.** le sens de variation de la fonction *f* sur les intervalles suivants :

- $[-2\pi\,;\,0]$?
- $[6\pi\,;\,8\pi]$?
- $[-4\pi\,;\,-3\pi]$?

b) Dresser le tableau de variations de *f* sur chacun des intervalles précédents.

36 **1.** La fonction cos est décroissante sur $[0\,;\pi]$ et croissante sur $[\pi\,;2\pi]$.

2. a) • C'est la parité qui permet d'obtenir à partir des variations de f sur $[0\,;2\pi]$ celles sur $[-2\pi\,;0]$.

• $0+3\times 2\pi = 6\pi$ et $2\pi + 3\times 2\pi = 8\pi$.

C'est donc la périodicité qui permet d'obtenir le sens de variations de f sur $[6\pi\,;8\pi]$ à partir de la question 1.

• $0-2\times 2\pi = -4\pi$ et $\pi - 2\times 2\pi = -3\pi$.

C'est donc la périodicité qui permet d'obtenir le sens de variations de f sur $[-4\pi\,;2\pi]$.

b)

x	-2π		$-\pi$		0
$f(x)$	1	↘	-1	↗	1

x	6π		7π		8π
$f(x)$	1	↘	-1	↗	1

x	-4π		-3π
$f(x)$	1	↘	-1

Exercice 45 et 47 p 198

On considère le programme ci-contre écrit en langage Python.

a) Exécuter pas à pas ce programme, et compléter un tableau de suivi des variables *a*, *b*, *m* ; faire apparaître également dans ce tableau les valeurs de $b-a$ et $\cos(m)$.

Quelles valeurs affiche le programme en sortie ?

Arrondir au centième.

b) Expliquer le rôle de ce programme.

c) Saisir ce programme et l'exécuter.

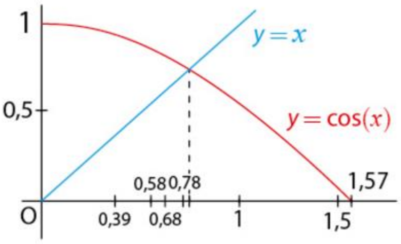
Interpréter le résultat obtenu.

```
from math import *

a=0
b=pi/2
while b-a>0.1:
    m=(a+b)/2
    if cos(m)>m:
        a=m
    else:
        b=m
print("La valeur de a est :",a)
print("La valeur de b est :",b)
```

a) Voici les valeurs successives arrondies au centième prises par les variables *a*, *b*, *m*.

a	0	0	0,39	0,58	0,68
b	1,57	0,78	0,78	0,78	0,78
$b-a$	1,57	0,78	0,39	0,20	0,1
m	0,78	0,39	0,58	0,68	
$\cos(m)$	0,71	0,92	0,84	0,78	



À la sortie de la boucle, le programme affiche $a=0{,}68$ et $b=0{,}78$ (valeurs arrondies du tableau).

b) Le programme détermine un encadrement $a<u<b$ de la solution u de l'équation $\cos(x)=x$ dans l'intervalle $\left[0\,;\,\frac{\pi}{2}\right]$.

Cet encadrement est tel que $b-a\leqslant 0{,}1$.

Pour mieux comprendre l'algorithme, on peut tracer dans un repère les courbes d'équations $y=x$ et $y=\cos(x)$.
On indique alors les valeurs successives de *a* et *b* obtenues comme ci-dessus.

c) Voici l'affichage obtenu avec le programme.

```
>>>
La valeur de a est : 0.6872233929727672
La valeur de b est : 0.7853981633974483
```

La solution u de l'équation $\cos(x)=x$ dans $\left[0\,;\,\frac{\pi}{2}\right]$ est telle que $0{,}687<u<0{,}786$.

47 **a)** Modifier le programme de l'exercice **45** afin d'obtenir un encadrement $a<w<b$, avec $b-a\leqslant 0{,}01$, de la solution w de l'équation $\sin(x)=0{,}75x$ dans l'intervalle $\left[\frac{\pi}{4}\,;\,\frac{\pi}{2}\right]$.

b) Saisir le programme obtenu et l'exécuter.

47

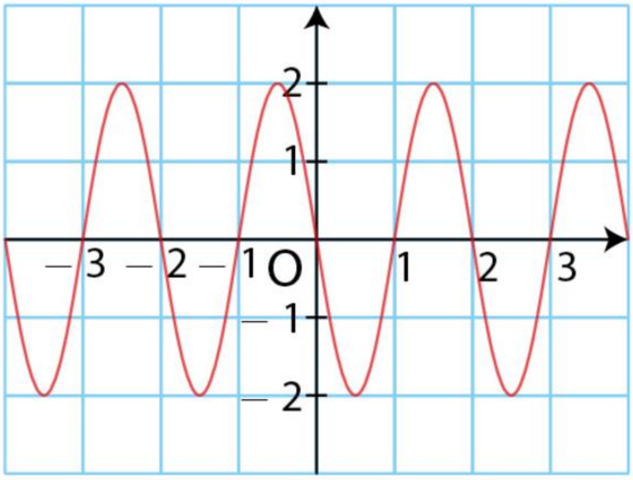
```
from math import *
a=pi/4
b=pi/2
while b-a>0.01:
    m=(a+b)/2
    if sin(m)>0.75*m:
        a=m
    else:
        b=m
print("La valeur de a est :",a)
print("La valeur de b est :",b)
```

<u>Exercice 12 p 193</u>

12 f est la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x) = -2\sin(\pi x)$$

Voici sa courbe représentative dans un repère.



a) Par lecture graphique, conjecturer la parité de f et sa période.

b) Démontrer ces conjectures.

12 **a)** f est impaire (sa courbe est symétrique par rapport à O) et périodique de période 2.

b) Pour tout nombre réel x,

$f(-x) = -2\sin(-2x) = -(-2\sin(2x)) = -f(x)$

f est donc impaire.

Pour tout nombre réel x,

$$f(x+2) = -2\sin(\pi(x+2)) = -2\sin(\pi x + 2\pi)$$
$$= -2\sin(\pi x) = f(x)$$

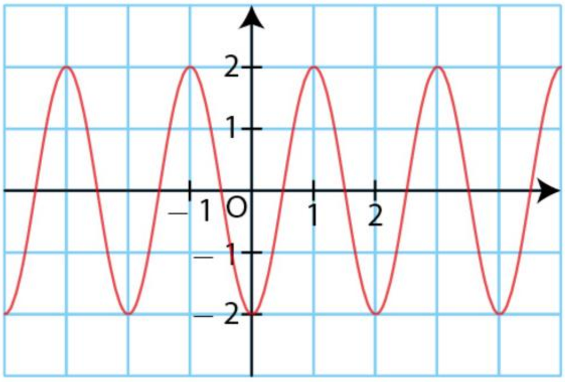
(La fonction sinus est périodique de période 2π).

Exercice 30 p195

30 f est la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x) = -2\cos(\pi x)$$

Voici sa courbe représentative dans un repère.



a) Par lecture graphique, conjecturer la parité de f et sa période.

b) Démontrer ces conjectures.

30 **a)** f semble paire et sa période semble être 2.

b) • Pour tout nombre réel x,

$f(-x) = -2\cos(\pi(-x)) = -2\cos(\pi x) = f(x)$

(La fonction cos est paire).

f est donc paire.

• Pour tout nombre réel x,

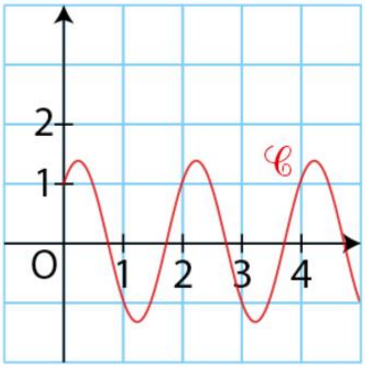
$$\begin{aligned} f(x+2) &= -2\cos(\pi(x+2)) = -2\cos(\pi x + 2\pi) \\ &= -2\cos(\pi x) \end{aligned}$$

(La fonction cos a pour période 2π).

f est donc périodique de période 2.

Exercice 57 p 201

57 Voici dans un repère la courbe représentative $\mathscr{C}$ d'une fonction f définie sur l'intervalle $[0\,;+\infty[$.



On sait que $f(x) = \sqrt{2}\sin(ax+b)$ où a est un nombre de $\mathbb{R}^*$ et $0 < b \leqslant \dfrac{\pi}{2}$.

a) Lire graphiquement $f(0)$ et la période T de f.

b) Montrer que a et b vérifient le système :

$$\begin{cases} a\mathrm{T} = 2\pi \\ \sqrt{2}\sin(b) = 1 \end{cases}$$

c) En déduire a et b.

57 **a)** $f(0) = 1$ et $T = 2$

b) • Pour tout nombre réel $x \geqslant 0$,

$f(x) = \sqrt{2}\sin(ax + b) = \sqrt{2}\sin(ax + b + 2\pi)$

(La fonction sin a pour période 2π)

$f(x) = \sqrt{2}\sin\left(a\left(x + \frac{2\pi}{a}\right) + b\right)$

$f(x) = f\left(x + \frac{2\pi}{a}\right)$.

Or T est la période donc $\frac{2\pi}{a} = T$ c'est-à-dire $aT = 2\pi$.

• $f(0) = 1$ équivaut à $\sqrt{2}\sin(b) = 1$.

a et b vérifient donc le système $\begin{cases} aT = 2\pi \\ \sqrt{2}\sin(b) = 1 \end{cases}$.

c) $aT = 2\pi$ donc $a = \frac{2\pi}{T} = \frac{2\pi}{2} = \pi$.

Sur $\left]0 ; \frac{\pi}{2}\right]$ l'équation équivaut à $\sqrt{2}\sin(b) = 1$ équivaut à $\sin(b) = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$ équivaut à $b = \frac{\pi}{4}$.

Ainsi $f(x) = \sqrt{2}\sin\left(\pi x + \frac{\pi}{4}\right)$.

Exercice 68 p 203

68 Imaginer une stratégie

Raisonner **Calculer**

1. On considère l'équation (**E**) :

$$2\sin^2(x) + \sin(x) - 1 = 0$$

On se propose de résoudre cette équation dans $[0 ; 2\pi[$.

a) On pose $X = \sin(x)$. Que devient l'équation ?

b) Résoudre l'équation d'inconnue X.

c) En déduire les solutions de (**E**) dans $[0 ; 2\pi[$.

2. Utiliser un raisonnement analogue pour résoudre dans $[-\pi ; \pi]$ l'équation (**F**) :

$$\cos^2(x) + 2\sin^2(x) = 2$$

68 **1. a)** On pose $X = \sin(x)$.
L'équation devient $2X^2 + X - 1 = 0$.
b) $2X^2 + X - 1 = 0$ si et seulement si $X = -1$
ou $X = \frac{1}{2}$
L'ensemble des solutions est $\mathcal{S} = \left\{-1\,;\,\frac{1}{2}\right\}$.
c) $X = \sin x$
Dans $[0\,;\,2\pi[$, $\sin x = -1$ si et seulement si $x = \frac{3\pi}{2}$
$\sin x = \frac{1}{2}$ si et seulement si $x = \frac{\pi}{6}$ ou $x = \frac{5\pi}{6}$.

L'ensemble des solutions de (E) est :

$$\mathcal{S} = \left\{\frac{\pi}{6}\,;\,\frac{5\pi}{6}\,;\,\frac{3\pi}{2}\right\}.$$

2. Pour tout nombre réel x, $\cos^2(x) + \sin^2(x) = 1$ donc $\cos^2(x) = 1 - \sin^2(x)$.
L'équation (F) est équivalente à :

$$1 - \sin^2 x + 2\sin^2(x) = 2$$

c'est-à-dire à $\sin^2(x) = 1$.
On pose $X = \sin(x)$.
L'équation (F) s'écrit $X^2 = 1$ qui admet pour solution $X = -1$ ou $X = 1$.
Dans $[-\pi\,;\,\pi]$, $\sin(x) = 1$ si et seulement si $x = \frac{\pi}{2}$
$\sin(x) = -1$ si et seulement si $x = -\frac{\pi}{2}$
L'ensemble des solutions de (F) est $\mathcal{S} = \left\{-\frac{\pi}{2}\,;\,\frac{\pi}{2}\right\}$.

Exercice 76 p 204

76 Déterminer une altitude maximum

Raisonner **Calculer**

L'altitude, en m, d'une certaine route au-dessus du niveau de la mer peut être modélisée en fonction du nombre x de kilomètres parcourus depuis un point de référence par :

$$A(x) = 500 + \cos\left(\frac{x}{4}\right) + \sqrt{3}\sin\left(\frac{x}{4}\right)$$

Si $x > 0$, cela signifie que l'on est à l'Est du point de référence, sinon cela signifie que l'on est à l'Ouest.

a) À quelle altitude est le point de référence ?

b) On admet que pour tous nombres réels a et b,

$$\sin(a+b) = \sin(a)\cos(b) + \sin(b)\cos(a)$$

Vérifier que $A(x) = 500 + 2\sin\left(\frac{x}{4} + \frac{\pi}{6}\right)$.

c) Une personne part de 25 km à l'Est du point de référence pour aller à 25 km à l'Ouest du point de référence. Combien de fois a-t-elle atteint l'altitude maximum ?

76 **a)** $A(0) = 500 + \cos(0) + \sqrt{3}\sin(0) = 501$
Le point de référence est à 501 m.
b) Pout tout nombre réel x,

$$500 + 2\sin\left(\frac{x}{4} + \frac{\pi}{6}\right) = 500 + 2\left[\sin\left(\frac{x}{4}\right)\cos\left(\frac{\pi}{6}\right) + \sin\left(\frac{\pi}{6}\right)\cos\left(\frac{x}{4}\right)\right]$$

$$500 + 2\sin\left(\frac{x}{4} + \frac{\pi}{6}\right) = 500 + 2\left[\frac{\sqrt{3}}{2}\sin\left(\frac{x}{4}\right) + \frac{1}{2}\cos\left(\frac{x}{4}\right)\right]$$

$$500 + 2\sin\left(\frac{x}{4} + \frac{\pi}{6}\right) = 500 + \sqrt{3}\sin\left(\frac{x}{4}\right) + \cos\left(\frac{x}{4}\right)$$

$$= A(x).$$

c) L'altitude maximale est 502 m.

En effet pour tout x, $A(x) \leqslant 502$ et $A\left(\frac{4\pi}{3}\right) = 502$.

Une personne part à 25 km à l'est du point de référence $(x = 25)$ pour aller à 25 km à l'ouest $(x = -25)$ donc x appartient à l'intervalle $[-25 ; 25]$.

La fonction A est périodique de période $T = \frac{2\pi}{\frac{1}{4}} = 8\pi$

$$\frac{4\pi}{3} + 8\pi = \frac{28\pi}{3} > 25$$

$$\frac{4\pi}{3} - 8\pi = -\frac{20\pi}{3} > -25$$

$$\frac{4\pi}{3} - 2 \times 8\pi = -\frac{4\pi}{3} < -25.$$

La personne atteint donc 2 fois l'altitude maximale.