I – Etude des variations d'une fonction :

a) Lien entre sens de variation et le signe de sa dérivée :

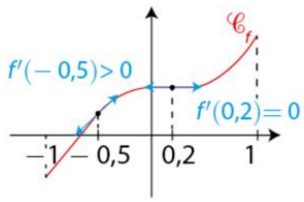
Théorème fondamental (admis) :

Soit une fonction f définie et dérivable sur un intervalle I et f' la fonction dérivée de f.

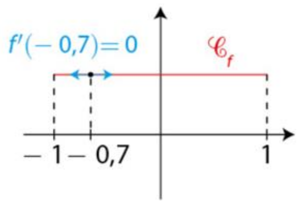
- Si f est croissante sur I, alors pour tout nombre réel x de I, $f'(x) \geq 0$.
- Si f est constante sur I, alors pour tout nombre réel x de I, $f'(x) = 0$.
- Si f est décroissante sur I, alors pour tout nombre réel x de I, $f'(x) \leq 0$.

❖ Exemple :

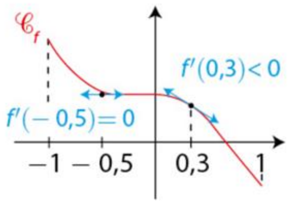
• f est croissante sur $[-1 ; 1]$



• f est constante sur $[-1 ; 1]$



• f est décroissante sur $[-1 ; 1]$

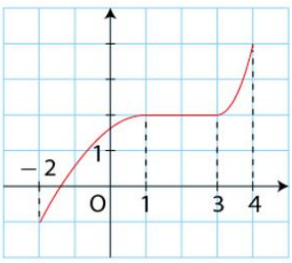


Propriété : conséquence :

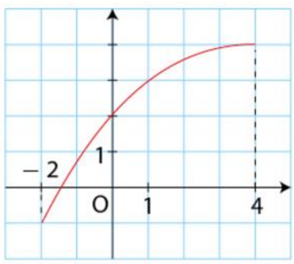
Soit une fonction f définie et dérivable sur un intervalle I. Alors .

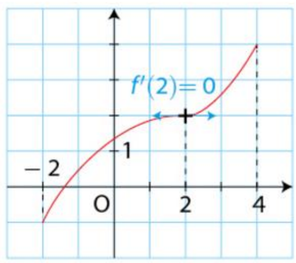
- Si $f'(x) \geq 0$ pour tout $x \in I$, alors f est croissante sur I.
- Si $f'(x) \leq 0$ pour tout $x \in I$, alors f est strictement décroissante sur I.
- Si $f'(x) = 0$ pour tout $x \in I$, alors f est constante sur I.

❖ Exemple : Dans chaque cas, la courbe tracée représente une fonction f dérivable sur l'intervalle $[-2 ; 4]$.
Cette fonction est telle que, pour tout nombre réel x de l'intervalle $[-2 ; 4]$, $f'(x) \geqslant 0$.



$f'(x)$ s'annule sur l'intervalle $[1 ; 3]$ contenu dans $[-2 ; 4]$.
On dit que f est **croissante** sur l'intervalle $[-2 ; 4]$.





$f'(x)$ ne s'annule pas sur l'intervalle $[-2 ; 4]$, ou bien seulement en quelques points isolés.
On dit que f est **strictement croissante** sur l'intervalle $[-2 ; 4]$.

Remarque :

- On a vu que le nombre dérivé en a est le coefficient directeur de la tangente au voisinage du point d'abscisse a, cette tangente est la droite qui s'approche le mieux de la courbe, la courbe et la tangente on le même sens de variation au voisinage de a. Et comme le signe du coefficient directeur d'une droite donne les variations de celle-ci, le signe de $f'(a)$ donne le sens de variation de f au voisinage de a.
- On peut étudier le sens de variation d'une fonction f à partir du signe de sa fonction dérivée.

b) Méthode d'étude des variations d'une fonction :

Pour étudier les variations d'une fonction :

- On détermine les ensembles de définition et de dérivabilité de la fonction f.
- On détermine la fonction dérivée de la fonction f.
- On étudie le signe de cette dérivée (en général en faisant un tableau de signes) ;
- On utilise les théorèmes précédents pour déterminer les variations de la fonction f.
- On résume les résultats dans un tableau de variations (on y fait apparaitre une ligne pour le signe de la dérivée).

❖ **Exercice :**

1) Déterminer le sens de variation de la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = 2\,x^2 - 8x + 1$.

2) Déterminer le sens de variation de la fonction g définie sur $\mathbb{R}$ par $g(x) = x^3 + \frac{9}{2}x^2 - 12x + 5$ définie sur $\mathbb{R}$.

II – Extremum d'une fonction :

a) Minimum local et maximum local :

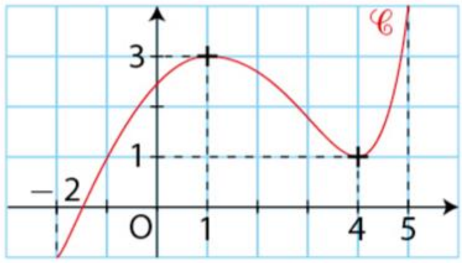
Définition : Soit une fonction f définie un intervalle I .

On dit que f admet un **minimum local** en x_0 s'il existe un intervalle ouvert J inclus dans I et contenant x_0 et tel que, pour tout nombre réel x de J : $f(x) \geq f(x_0)$.

On dit que f admet un **maximum local** en x_0 s'il existe un intervalle ouvert J inclus dans I et contenant x_0 et tel que, pour tout nombre réel x de J : $f(x) \leq f(x_0)$.

Un minimum ou maximum local est appelé **extremum local.**

f est une fonction définie sur un intervalle [-2 ;5] dont voici sa représentation graphique dans le repère ci-dessous .

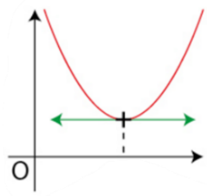


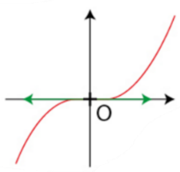
b) Dérivée et extremum local:

Définition : Soit une fonction f dérivable sur un intervalle ouvert I. Et soit x_0 un réel appartenant à I.

Si f admet un extremum local en x_0 alors $f'(x_0) = 0$.

Remarques :
Si $f(x_0)$ est un extremum local, alors la tangente à la courbe représentative de f au point d'abscisse x_0 est parallèle à l'axe des abscisses.





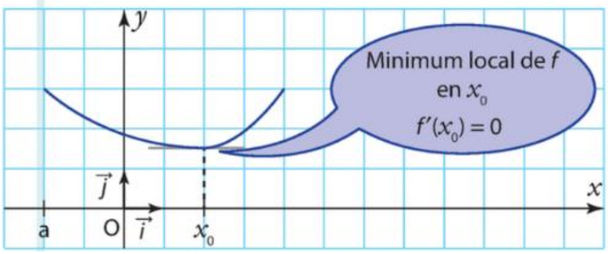
La réciproque de la propriété est fausse. Si f est la fonction cube, alors $f'(0) = 0$ et $f(0)$ n'est pas un extremum local de f.

Propriété : Soit une fonction f dérivable sur un intervalle ouvert $I =]a\,;b[$. Et soit x_0 un réel appartenant à I.

Si $f'(x_0) = 0$ et si f' change de signe en x_0 (on dit que f' s'annule en changeant de signe en x_0) alors f admet un extremum local en x_0 .

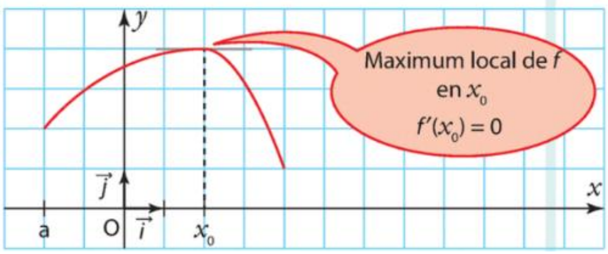
f admet un **minimum local** en x_0

x	a		x_0		b
Signe de $f'(x)$		−	0	+	
Variations de f		↘		↗	



f admet un **maximum local** en x_0

x	a		x_0		b
Signe de $f'(x)$		+	0	−	
Variations de f		↗		↘	



- ❖ **Exercice 1: Recherche d'un extremum :**

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x^3 - 2x^2 - 4x + 1$ admet-elle des extremums sur $\mathbb{R}$?

- ❖ **Exercice 2: Position relative de deux courbes :**

Soit f et g deux fonctions définies sur $[2\ ;\ +\infty[$ par : $f(x) = x^3$ et $g(x) = -5x + 18$.
Étudier la position relative des courbes représentatives C_f et C_g.