

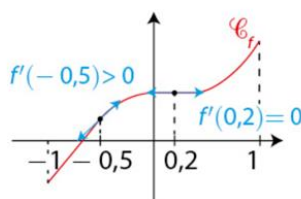
I – Etude des variations d’une fonction :a) Lien entre sens de variation et le signe de sa dérivée :**Théorème fondamental (admis) :**

Soit une fonction f définie et dérivable sur un intervalle I et f' la fonction dérivée de f .

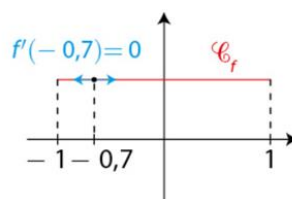
- Si f est croissante sur I , alors pour tout nombre réel x de I , $f'(x) \geq 0$.
- Si f est constante sur I , alors pour tout nombre réel x de I , $f'(x) = 0$.
- Si f est décroissante sur I , alors pour tout nombre réel x de I , $f'(x) \leq 0$.

❖ Exemple :

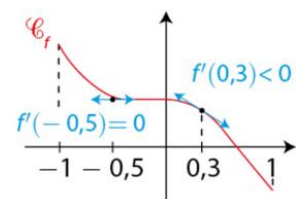
• f est croissante sur $[-1 ; 1]$



• f est constante sur $[-1 ; 1]$



• f est décroissante sur $[-1 ; 1]$

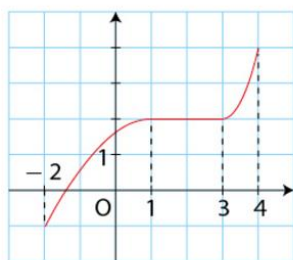
**Propriété : conséquence :**

Soit une fonction f définie et dérivable sur un intervalle I . Alors .

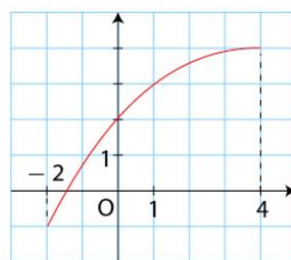
- Si $f'(x) \geq 0$ pour tout $x \in I$, alors f est croissante sur I .
- Si $f'(x) \leq 0$ pour tout $x \in I$, alors f est strictement décroissante sur I .
- Si $f'(x) = 0$ pour tout $x \in I$, alors f est constante sur I .

❖ Exemple :

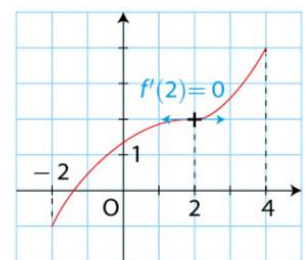
Dans chaque cas, la courbe tracée représente une fonction f dérivable sur l'intervalle $[-2 ; 4]$. Cette fonction est telle que, pour tout nombre réel x de l'intervalle $[-2 ; 4]$, $f'(x) \geq 0$.



$f'(x)$ s'annule sur l'intervalle $[1 ; 3]$ contenu dans $[-2 ; 4]$.
On dit que f est **croissante** sur l'intervalle $[-2 ; 4]$.



$f'(x)$ ne s'annule pas sur l'intervalle $[-2 ; 4]$, ou bien seulement en quelques points isolés.
On dit que f est **strictement croissante** sur l'intervalle $[-2 ; 4]$.

Remarque :

- On a vu que le nombre dérivé en a est le coefficient directeur de la tangente au voisinage du point d'abscisse a , cette tangente est la droite qui s'approche le mieux de la courbe, la courbe et la tangente ont le même sens de variation au voisinage de a . Et comme le signe du coefficient directeur d'une droite donne les variations de celle-ci, le signe de $f'(a)$ donne le sens de variation de f au voisinage de a .
- On peut étudier le sens de variation d'une fonction f à partir du signe de sa fonction dérivée.

b) Méthode d'étude des variations d'une fonction :

Pour étudier les variations d'une fonction :

- On détermine les ensembles de définition et de dérivabilité de la fonction f .
- On détermine la fonction dérivée de la fonction f .
- On étudie le signe de cette dérivée (en général en faisant un tableau de signes) ;
- On utilise les théorèmes précédents pour déterminer les variations de la fonction f .
- On résume les résultats dans un tableau de variations (on y fait apparaître une ligne pour le signe de la dérivée).

❖ Exercice :

1) Déterminer le sens de variation de la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = 2x^2 - 8x + 1$.

La fonction f est dérivable sur $\mathbb{R}$ et, pour tout nombre réel x , on a : $f'(x) = 2 \times 2x - 8 \times 1 = 4x - 8$.

Signe de $f'(x)$ sur $\mathbb{R}$: Or $4x - 8 \geq 0 \Leftrightarrow 4x \geq 8 \Leftrightarrow x \geq 2$

On en déduit le tableau de variation de la fonction f sur $\mathbb{R}$:

x	$-\infty$	2	$+\infty$
signe de $f'(x)$	-	$\bigcirc$	+
Variation de f			

En effet : $f(2) = 2 \times 2^2 - 8 \times 2 + 1 = -7$.

2) Déterminer le sens de variation de la fonction g définie sur $\mathbb{R}$ par $g(x) = x^3 + \frac{9}{2}x^2 - 12x + 5$ définie sur $\mathbb{R}$.

g étant un polynôme du 3^{ème} degré, g est dérivable sur $\mathbb{R}$, pour tout x réel, on a : $g'(x) = 3x^2 + 9x - 12$.

Signe de $g'(x)$ sur $\mathbb{R}$:

g' est un polynôme du second degré qui a pour discriminant $\Delta = 9^2 - 4 \times 3 \times (-12) = 225 > 0$

Il possède donc 2 racines réelles : $x_1 = \frac{-9 - \sqrt{225}}{2 \times 3} = -4$ et $x_2 = \frac{-9 + \sqrt{225}}{2 \times 3} = 1$.

Or un polynôme est du signe de a (ici $a = 1 > 0$) sauf entre ses deux racines

On en déduit le tableau de variations de f :

x	$-\infty$	-4	1	$+\infty$
Signe de $f'(x)$	+	$\bigcirc$	$\bigcirc$	+
Variations de f				

$g(-4) = (-4)^3 + \frac{9}{2}(-4)^2 - 12 \times (-4) + 5 = 61$ et $g(1) = 1^3 + \frac{9}{2} \times 1 - 12 \times 1 + 5 = -\frac{3}{2}$

II – Extremum d'une fonction :

a) Minimum local et maximum local :

Définition : Soit une fonction f définie un intervalle I .

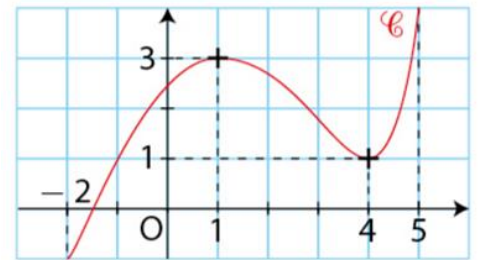
On dit que f admet un **minimum local** en x_0 s'il existe un intervalle ouvert J inclus dans I et contenant x_0 et tel que, pour tout nombre réel x de J : $f(x) \geq f(x_0)$.

On dit que f admet un **maximum local** en x_0 s'il existe un intervalle ouvert J inclus dans I et contenant x_0 et tel que, pour tout nombre réel x de J : $f(x) \leq f(x_0)$.

Un minimum ou maximum local est appelé **extremum local**.

f est une fonction définie sur un intervalle $[-2; 5]$ dont voici sa représentation graphique dans le repère ci-dessous.

- Pour tout $x \in]0; 2[$, on a $f(x) \leq f(1)$ donc la fonction f admet un maximum local en 1 qui vaut 3.
- Pour tout $x \in]3; 5[$, on a $f(x) \geq f(4)$ donc la fonction f admet un minimum local en 4 qui vaut 1.



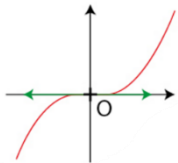
b) Dérivée et extremum local:

Définition : Soit une fonction f dérivable sur un intervalle ouvert I . Et soit x_0 un réel appartenant à I .

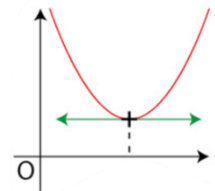
Si f admet un extremum local en x_0 alors $f'(x_0) = 0$.

Remarques :

Si $f(x_0)$ est un extremum local, alors la tangente à la courbe représentative de f au point d'abscisse x_0 est parallèle à l'axe des abscisses.

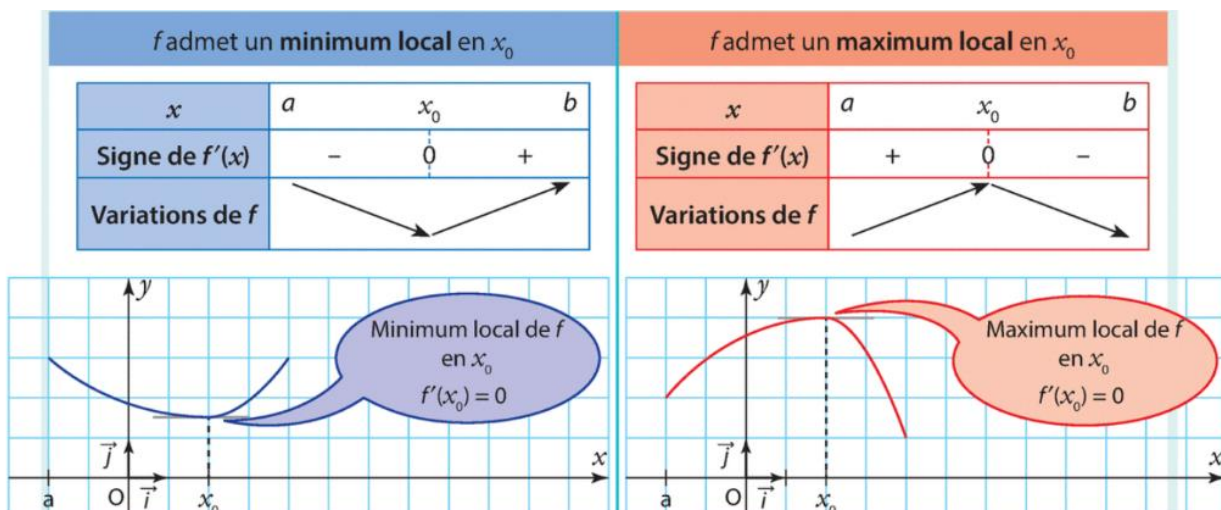


La réciproque de la propriété est fausse. Si f est la fonction cube, alors $f'(0) = 0$ et $f(0)$ n'est pas un extremum local de f .



Propriété : Soit une fonction f dérivable sur un intervalle ouvert $I =]a; b[$. Et soit x_0 un réel appartenant à I .

Si $f'(x_0) = 0$ et si f' change de signe en x_0 (on dit que f' s'annule en changeant de signe en x_0) alors f admet un extremum local en x_0 .



❖ **Exercice 1: Recherche d'un extremum :**

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x^3 - 2x^2 - 4x + 1$ admet-elle des extremums sur $\mathbb{R}$?

f est une fonction polynôme donc elle est dérivable sur $\mathbb{R}$, on a pour tout x réel :

$$f'(x) = 3x^2 - 4x - 3$$

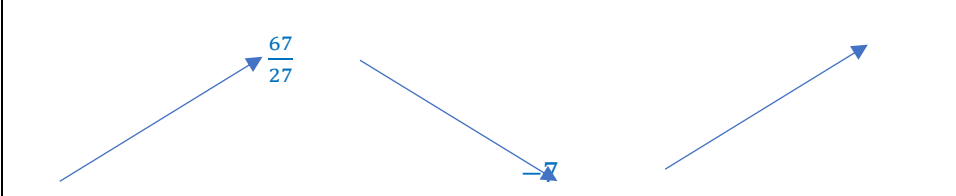
Son discriminant est $\Delta = (-4)^2 - 4 \times 3 \times (-4) = 64$ et ses racines sont :

$$x_1 = \frac{-(-4) - \sqrt{64}}{2 \times 3} = -\frac{2}{3} \quad \text{et} \quad x_2 = \frac{-(-4) + \sqrt{64}}{2 \times 3} = 2$$

$f'(x)$ est un polynôme du second degré avec $a = 3 > 0$, il est donc positif à l'extérieur de ses racines et négatif entre ses racines.

On obtient donc le tableau de signes de f' et le tableau de variation de f ci-dessous.

On dresse alors le tableau de variations :

x	$-\infty$	$-\frac{2}{3}$		2		$+\infty$
$f'(x)$	+	$\bigcirc$	-	$\bigcirc$	+	
f						

$$f\left(-\frac{2}{3}\right) = \frac{67}{27} \quad \text{et} \quad f(2) = -7$$

On en déduit que la fonction f admet un minimum local égal à -7 atteint en $x = 2$ et un maximum local égal à $\frac{67}{27}$ atteint en $x = -\frac{2}{3}$.

❖ **Exercice 2: Position relative de deux courbes :**

Soit f et g deux fonctions définies sur $[2; +\infty[$ par : $f(x) = x^3$ et $g(x) = -5x + 18$.
Étudier la position relative des courbes représentatives C_f et C_g .

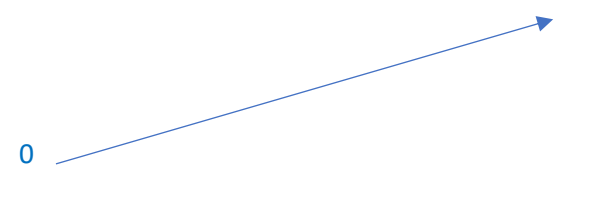
On va étudier le signe de la différence $f(x) - g(x)$: On pose : $h(x) = f(x) - g(x) = x^3 + 5x - 18$.

h est une fonction polynôme donc elle est dérivable sur $[2; +\infty[$, on a pour tout $x \in [2; +\infty[$, on a :

$$h'(x) = 3x^2 + 5 \quad \text{donc} \quad h'(x) > 0.$$

On en déduit que la fonction h est strictement croissante sur $[2; +\infty[$.

On construit le tableau de variations :

x	2	$+\infty$
$h'(x)$		+
h		

$h(2) = 2^3 + 5 \times 2 - 18 = 0$ d'après le tableau de variations, on a $h(x) \geq 0$.

Soit : $f(x) - g(x) \geq 0$ et donc $f(x) \geq g(x)$. On en déduit que la courbe C_f est au-dessus de la courbe C_g sur l'intervalle $[2; +\infty[$.