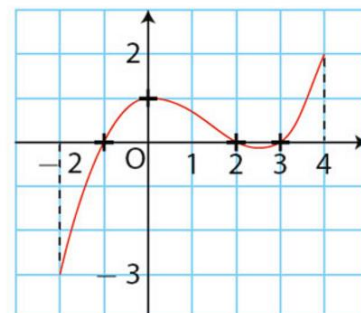


Exercice résolu 1 p 121 : Lire le sens de variation de f sur la courbe de f'

f est une fonction dérivable sur l'intervalle $[-2 ; 4]$.

La courbe représentative de sa fonction dérivée f' est tracée dans le repère ci-contre.

Déterminer graphiquement le sens de variation de la fonction f .



Solution

Par lecture sur le graphique :

- pour tout nombre réel de x de $[-2 ; -1]$ et de $[2 ; 3]$, $f'(x) \leq 0$.

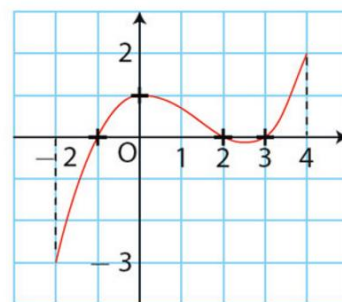
Donc f est décroissante sur chacun des intervalles

$[-2 ; -1]$ et $[2 ; 3]$;

- pour tout nombre réel de x de $[-1 ; 2]$ et de $[3 ; 4]$, $f'(x) \geq 0$.

Donc f est croissante sur chacun des intervalles

$[-1 ; 2]$ et $[3 ; 4]$.

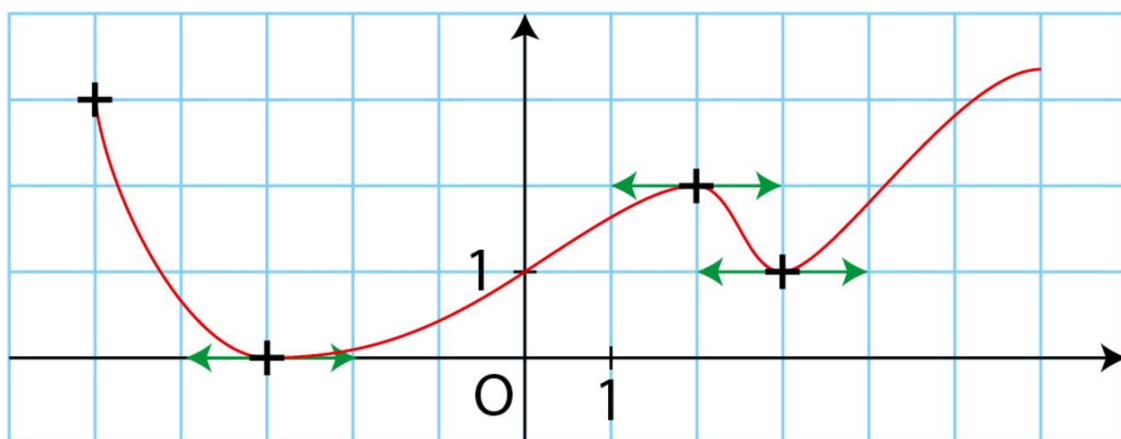


On lit le signe de $f'(x)$ sur la courbe représentative de f' . On en déduit le sens de variation de f sur chaque intervalle où le signe de $f'(x)$ est constant.

- 21** f est une fonction définie et dérivable sur $\mathbb{R}$.
Recopier et compléter son tableau de variations.

x	$-\infty$	-2	1	$+\infty$	
$f'(x)$		0	$-$	0	$+$
$f(x)$					

- 22** Voici la courbe représentative, dans un repère, d'une fonction f dérivable sur l'intervalle $[-5 ; 6]$.
Dresser le tableau de signes de $f'(x)$.



24 Voici la courbe représentative, dans un repère, d'une fonction h dérivable sur l'intervalle $[-3 ; 4]$.

Déterminer graphiquement le signe de :

a) $h(0)$

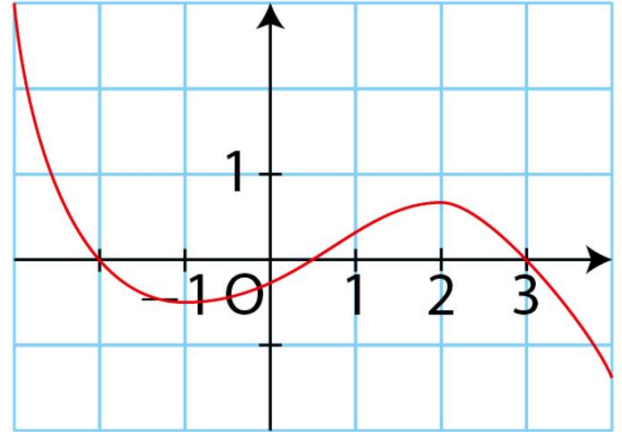
b) $h'(0)$

c) $h(-3)$

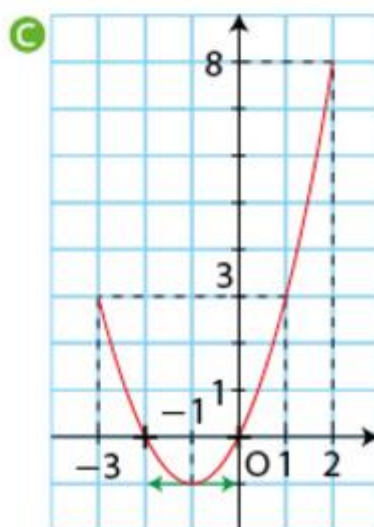
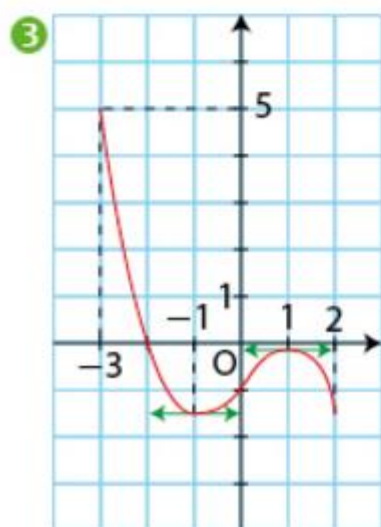
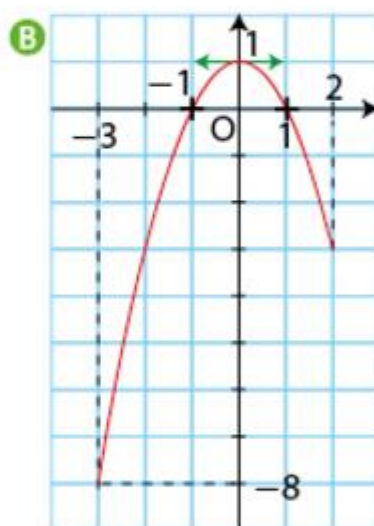
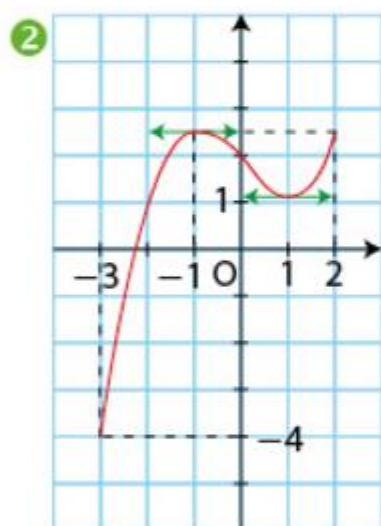
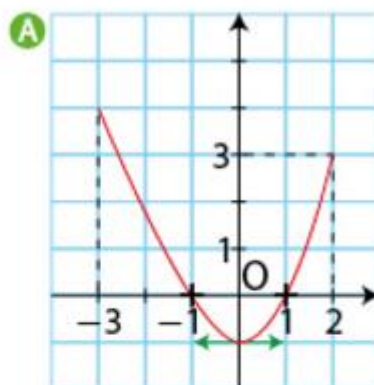
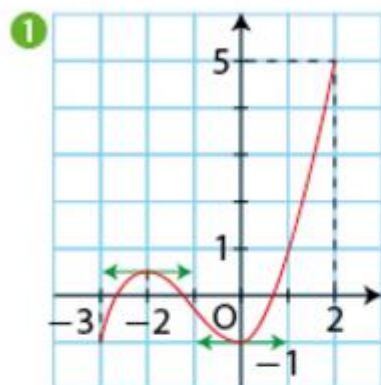
d) $h'(-3)$

e) $h(2,5)$

f) $h'(2,5)$



27 Les courbes **1**, **2**, **3** ci-après représentent des fonctions f , g , h et les courbes **A**, **B**, **C** représentent leurs fonctions dérivées f' , g' , h' dans un repère. Faire correspondre chaque fonction avec sa fonction dérivée en expliquant son choix.



Exercice résolu 2 p 121 Etudier le signe de f'

f est la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x^3 + 4x$.

a) Déterminer $f'(x)$ et étudier son signe.

b) En déduire le sens de variation de la fonction f .

Solution

a) f est une fonction polynôme donc f est dérivable sur $\mathbb{R}$ et pour tout nombre réel x , $f'(x) = 3x^2 + 4$.

Pour tout nombre réel x , $3x^2 + 4 > 0$, donc $f'(x) > 0$.

b) Ainsi, la fonction f est croissante sur $\mathbb{R}$.

Pour tout nombre réel x , $x^2 \geq 0$ et $4 > 0$, donc $3x^2 + 4 > 0$.

Exercice résolu 6 p 122 : Dresser le tableau de variation d'une fonction

g est la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $g(x) = x^3 - 6x$.

Étudier le sens de variation de la fonction g puis dresser son tableau de variations.

Solution

g est une fonction polynôme donc g est dérivable sur $\mathbb{R}$.

Pour tout nombre réel x , $g'(x) = 3x^2 - 6$ c'est-à-dire :

$$g'(x) = 3(x^2 - 2) = 3(x + \sqrt{2})(x - \sqrt{2})$$

$g'(x) = 0$ si, et seulement si, $x = \sqrt{2}$ ou $x = -\sqrt{2}$.

On utilise le signe de $ax^2 + bx + c$ pour dresser le tableau de variations de la fonction g .

x	$-\infty$	$-\sqrt{2}$		$\sqrt{2}$	$+\infty$
$g'(x)$	+	0	-	0	+
$g(x)$					

Pour étudier le signe de $g'(x)$, on factorise $x^2 - 2$ en utilisant l'identité $a^2 - b^2 = (a - b)(a + b)$.

Dans un tableau, on note les valeurs exactes des extremums $g(\sqrt{2}) = 2\sqrt{2} - 6\sqrt{2} = -4\sqrt{2}$. Ici g est impaire donc $g(-\sqrt{2}) = -g(\sqrt{2}) = 4\sqrt{2}$.

Exercice résolu 13 p 123 : Etudier une fonction polynôme du second degré

f est la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x^2 + 2x - 3$.

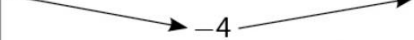
- a)** Étudier le sens de variation de f et dresser son tableau de variations.
b) Dans un repère, tracer la courbe représentative de la fonction f .

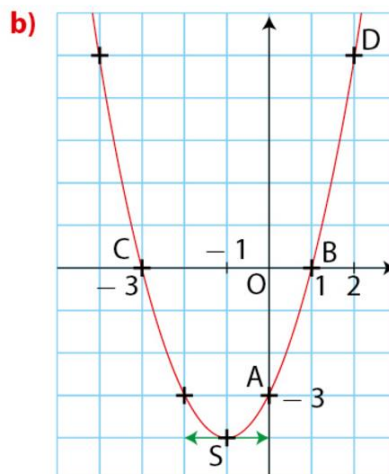
Solution

a) Pour tout nombre réel x ,

$$f'(x) = 2x + 2$$

Le signe d'une fonction affine permet de dresser le tableau de variations de la fonction f .

x	$-\infty$	-1	$+\infty$
$f'(x)$	$-$	0	$+$
$f(x)$			



Pour tracer cette parabole :

- on place le sommet S ;
- on place les points d'intersection avec les axes : $A(0 ; -3)$, $B(1 ; 0)$, $C(-3 ; 0)$;
- on place un autre point : $D(2 ; 5)$;
- on utilise l'axe de symétrie.

29 f est la fonction définie sur $\mathbb{R} - \{3\}$ par :

$$f(x) = \frac{x + 1}{2x - 6}$$

a) Vérifier que pour tout nombre réel $x \neq 3$,

$$f'(x) = \frac{-8}{(2x - 6)^2}$$

b) Quel est le signe de $f'(x)$?

c) Dresser le tableau de variations de la fonction f .

Penser à mettre une double barre en 3.

30  g est la fonction définie sur $\mathbb{R} - \{-2\}$ par :

$$g(x) = \frac{x^2}{x+2}$$

a) Vérifier que pour tout nombre réel $x \neq -2$,

$$g'(x) = \frac{x(x+4)}{(x+2)^2}$$

b) Justifier que pour tout nombre réel $x \neq -2$, $g'(x)$ a le même signe que le produit $x(x+4)$.

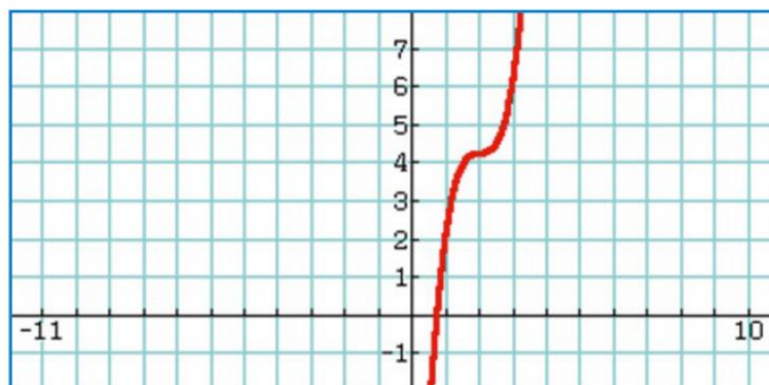
c) Dresser le tableau de variations de la fonction g .

d) Afficher la courbe représentative de la fonction g à l'écran de la calculatrice et vérifier la cohérence avec le tableau de variations.

32 k est la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$k(x) = 2x^3 - 12,06x^2 + 24,24x - 12$$

Pedro a affiché ci-dessous la courbe représentative de k à l'écran de sa calculatrice.



Il affirme : « La fonction k est croissante sur $\mathbb{R}$. »
Que peut-on en penser ? Justifier.

Exercice résolu 7 p 122 Recherche des extrémums locaux :

u est la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $u(x) = x^3 - 4,5x^2 + 6x$. Déterminer les extrémums locaux de u .

Solution

u est une fonction polynôme donc elle est dérivable sur $\mathbb{R}$. Pour tout nombre réel x ,

$$u'(x) = 3x^2 - 9x + 6 = 3(x^2 - 3x + 2)$$

$$\Delta = (-3)^2 - 4 \times 1 \times 2 = 1 \text{ et } \Delta > 0$$

$$x_1 = \frac{-(-3) + 1}{2} = 2 \text{ et } x_2 = \frac{-(-3) - 1}{2} = 1.$$

Le signe de $ax^2 + bx + c$ permet de dresser ci-contre le tableau de variations de la fonction u . D'après ce tableau, $u(1) = 2,5$ est un maximum local de la fonction u et $u(2) = 2$ est un minimum local de u .

On lit les extrémums locaux de la fonction u sur son tableau de variations.

x	$-\infty$	1	2	$+\infty$	
$u'(x)$	+	0	-	0	+
$u(x)$	↗ ↘ ↗ ↘ <				

33 f est une fonction définie sur l'intervalle $[-2 ; 3]$. Voici son tableau de variations.

x	-2	0	1	3
$f(x)$	-3	6	-4	-1

Diagram showing the variation of $f(x)$ between the points: $-3 \rightarrow 6 \rightarrow -4 \rightarrow -1$ with arrows indicating the direction of the function's path.

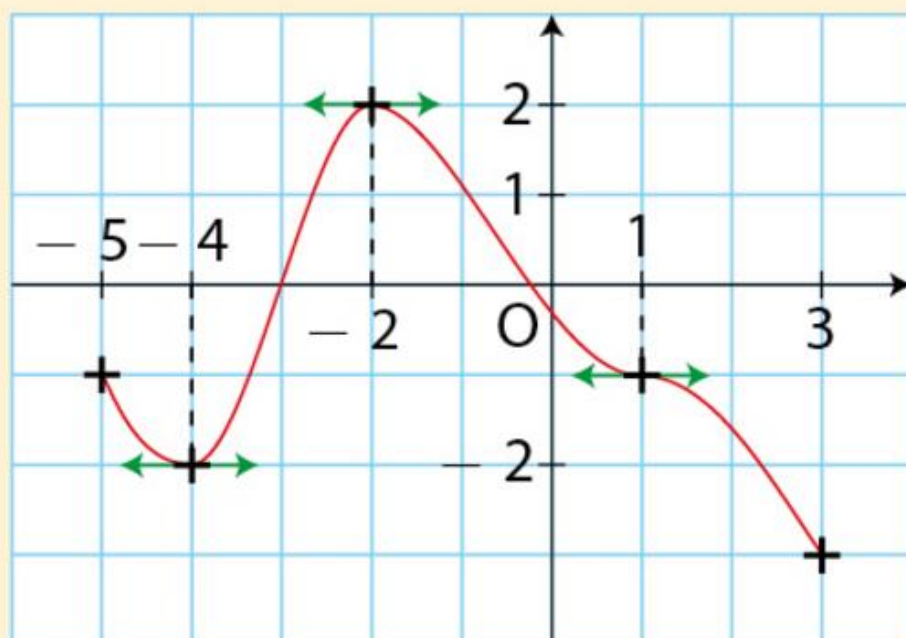
Lire les extremums locaux de f .

34 g est une fonction dérivable sur l'intervalle $[-5 ; 6]$. Voici le tableau de signes de sa fonction dérivée g' .

x	-5	-1	3	6	
$g'(x)$	$+$	0	$-$	0	$-$

Déterminer oralement pour quelle(s) valeur(s) de x la fonction g admet un extremum local.

35 h est une fonction définie sur l'intervalle $[-5 ; 3]$. Sa courbe représentative est donnée dans le repère ci-dessous.



Dans chaque cas, choisir la bonne réponse.

a) Un maximum local de h sur $[-5 ; 3]$ est :

- (1) -2 (2) -1 (3) 2

b) Un minimum local de h sur $[-5 ; 3]$ est atteint en :

- (1) -2 (2) -4 (3) 1

c) Un intervalle ouvert J tel que pour tout x de J , $h(x) \geq -2$ est :

- (1) $] -5 ; 3[$ (2) $] -5 ; -2[$ (3) $] 1 ; 3[$

36 f est la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par :

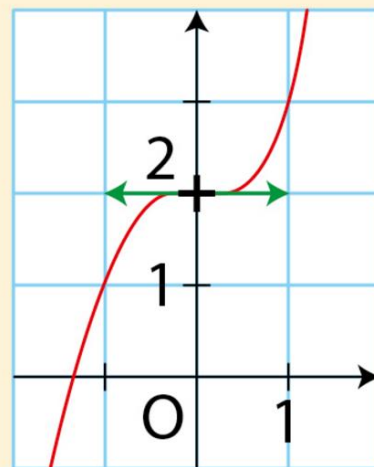
$$f(x) = x^3 + 2$$

Voici sa courbe représentative dans le repère ci-contre.

a) Lire $f(0)$ et $f'(0)$.

b) Imane affirme : « $f(0)$ n'est pas un extremum local de f bien que $f'(0) = 0$. »

Que dire de cette affirmation ?



Exercice résolu 12 p 123 : Démontrer une inégalité :

f est la fonction définie sur l'intervalle $[1; +\infty[$ par $f(x) = 2x + \frac{8}{x}$.
Démontrer que pour tout nombre réel $x \geq 1$, $f(x) \geq 8$.

Solution

f est la somme de deux fonctions dérivables sur $[1; +\infty[$ donc f est dérivable sur $[1; +\infty[$.

Pour tout nombre réel $x \geq 1$,

$$f'(x) = 2 - \frac{8}{x^2} = \frac{2(x^2 - 4)}{x^2} = \frac{2(x+2)(x-2)}{x^2}$$

Pour tout nombre réel $x \geq 1$, $2(x+2) > 0$ et $x^2 > 0$ donc le signe de $f'(x)$ est celui de $x - 2$.

On obtient le tableau de variations de f ci-contre.

$f(2) = 8$ est le minimum de f sur $[1; +\infty[$ donc pour tout nombre réel $x \geq 1$, $f(x) \geq 8$.

Pour établir une inégalité du type $f(x) \geq k$ (avec $k \in \mathbb{R}$) on peut étudier tout d'abord les variations de la fonction f et observer ensuite les extremums locaux.

x	1	2	$+\infty$
$f'(x)$	-	0	+
$f(x)$			

42 g est la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$g(x) = x^3 - 9x^2 + 24x - 3$$

- a) Dresser le tableau de variations de la fonction g .
 b) Déterminer les extremums locaux de g .
 c) Démontrer que pour tout nombre réel $x \geq 2$:

$$g(x) \geq 13$$

107**Algo****Étudier une consommation**

45 min

D'après Bac 2018, Polynésie

On s'intéresse à la consommation d'un véhicule roulant aux biocarburants en fonction de la vitesse de ce véhicule. Cette consommation est modélisée par la fonction f définie sur l'intervalle $[30 ; 130]$ par :

$$f(x) = \frac{8x^2 - 800x + 30\,000}{x^2}$$

où x est exprimé en $\text{km} \cdot \text{h}^{-1}$ et $f(x)$ est exprimé en litre pour 100 km.

a) Suivant ce modèle, lorsque le véhicule roule à $30 \text{ km} \cdot \text{h}^{-1}$, quelle est sa consommation ?

Et lorsqu'il roule à $50 \text{ km} \cdot \text{h}^{-1}$?

b) Montrer que la dérivée f' de f sur l'intervalle $[30 ; 130]$ peut s'écrire $f'(x) = \frac{800x - 60\,000}{x^3}$.

c) Étudier le signe de $f'(x)$ sur $[30 ; 130]$ et en déduire le tableau de variations de f sur cet intervalle.

d) Pour quelle vitesse la consommation est-elle minimum ? Que vaut alors cette consommation ?

Arrondir au centième.

e) On considère l'algorithme ci-dessous.

```

x ← 30
y ← 14
Tant que y > 4
  | x ← x + 1
  | y ← (8x² - 800x + 30 000) / x²
Fin Tant que
  
```

Quelle est la valeur de x obtenue à la fin de l'exécution de l'algorithme ? En donner une interprétation dans le contexte de l'exercice.

43 h est la fonction définie sur l'intervalle $[0 ; 1]$ par :

$$h(x) = x^2 - x^3$$

a) Dresser le tableau de variations de h .

b) Justifier que pour tout nombre réel x de $[0 ; 1]$:

$$h(x) \geq 0$$

c) En déduire la position relative, dans un repère, de la courbe représentative de la fonction $x \mapsto x^2$ et de la courbe de la fonction $x \mapsto x^3$ sur l'intervalle $[0 ; 1]$.

76  Une entreprise extrait et vend une matière première. Pour x tonnes vendues, elle réalise un bénéfice, en euro, donné par la fonction B définie sur l'intervalle $[0 ; 50]$ par :

$$B(x) = -x^3 + 10x^2 + 3000x$$

a) Déterminer $B'(x)$ et étudier son signe selon les valeurs de x .

b) En déduire le tableau de variations de B .

c) Quelle quantité de matière première, en kg, l'entreprise doit-elle vendre pour réaliser un bénéfice maximum ? Quel est alors ce bénéfice, en euro ?
Arrondir à l'unité.

d) Contrôler les résultats à la calculatrice.

81 h est une fonction définie sur l'intervalle $[0 ; +\infty[$ par :

$$h(x) = \frac{2x}{x^2 + 9}$$

1. a) Vérifier que, pour tout nombre réel $x \geq 0$,

$$h'(x) = \frac{2(3+x)(3-x)}{(x^2 + 9)^2}$$

b) Justifier que $h'(x)$ a le même signe que $3 - x$ sur l'intervalle $[0 ; +\infty[$.

c) Dresser le tableau de variations de la fonction h .

2. Démontrer que :

a) pour tout nombre réel $x \geq 0$,

$$h(x) \leq \frac{1}{3}$$

b) pour tout nombre réel $x \geq 5$, $0 \leq h(x) \leq 0,3$.

*****CORRECTION EXERCICES*****

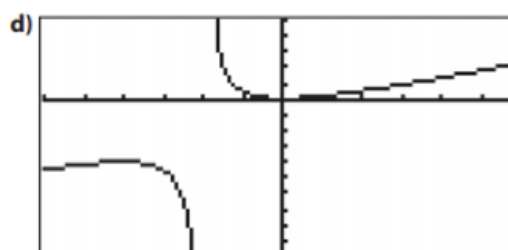
30 a) Pour tout nombre réel $x \neq -2$,

$$g'(x) = \frac{2x(x+2) - x^2 \times 1}{(x+2)^2} = \frac{x^2 + 4x}{(x+2)^2} = \frac{x(x+4)}{(x+2)^2}$$

b) Pour tout nombre réel $x \neq -2$, $(x+2)^2 > 0$ donc le signe de $g'(x)$ est celui de $x(x+4)$.

c) $x(x+4) = 0$ si et seulement si $x = 0$ ou $x = -4$.
On obtient le tableau de signes ci-dessous

x	$-\infty$	-4	-2	0	$+\infty$	
$g'(x)$	+	0	-	-	0	+
$g(x)$	-8		0			



$-6 \leq X \leq 6$, pas 1 ; $-20 \leq Y \leq 10$ pas 2

32 k est dérivable sur $\mathbb{R}$ et on a pour tout x ,

$$k'(x) = 6x^2 - 24,12x + 24,24$$

$k'(x) = 0$ si et seulement si $x = 2$ ou $x = 2,02$. On complète le tableau de signes ci-dessous

x	$-\infty$	2		2,02		$+\infty$
$h'(x)$	+	0	-	0	+	
$h(x)$	↗		4,24	↘		4,239 992 ↗

Pedro a donc tort.

33 6 est un maximum local et -4 est un minimum local.

34 $g'(x)$ s'annule en -1 en changeant de signe donc g admet en $x = -1$ un extremum local, ici par lecture du tableau il s'agit d'un maximum.

35 a) (3) b) (2) c) (2)

36 a) $f(0) = 2$ et $f'(0) = 0$.

b) Cette affirmation est vraie car $f'(x) = 3x^2$ s'annule en 0 sans changer de signe.

42 a) g est dérivable et $g'(x) = 3x^2 - 18x + 24$.

$g'(x) = 0$ si et seulement si $x = 2$ ou $x = 4$.

x	$-\infty$	2	4	$+\infty$	
$g'(x)$	+	0	-	0	+
$g(x)$					

b) D'après **a)**, g admet un maximum local égal à 17 en $x = 2$ et un minimum local égal à 13 en $x = 4$.

c) Sur l'intervalle $[2; +\infty[$ g admet 13 pour minimum local, donc pour tout $x \geq 2$, $g(x) \geq 13$.

107 a) $f(30) = \frac{44}{3} \approx 14,7$

$f(50) = 4$

À $30 \text{ km} \cdot \text{h}^{-1}$ la consommation est 14,7 litres pour 100 km et à $50 \text{ km} \cdot \text{h}^{-1}$ la consommation est de 4 L pour 100 km.

b) f est dérivable sur $[30; 130]$ et pour tout x ,

$$f'(x) = \frac{(16x - 800)x^2 - (8x^2 - 800x + 30\,000) \times 2x}{x^4}$$

$$f'(x) = \frac{x(16x^2 - 800x - 16x^2 + 1600x - 60\,000)}{x^4}$$

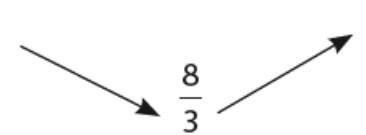
$$f'(x) = \frac{800x - 60\,000}{x^3}$$

c) Pour tout nombre réel x de l'intervalle $[30 ; 130]$,
 $x^3 > 0$ donc le signe de $f'(x)$ est celui de
 $800x - 60\,000$.

$$f'(x) = 0 \text{ si et seulement si } x = \frac{60\,000}{800} = 75.$$

On dresse le tableau de variations de la fonction f .

x	30	75	130
$f'(x)$	—	0	+
$f(x)$	$\frac{44}{3}$	$\frac{8}{3}$	$\frac{612}{169}$



d) La consommation est minimum pour la vitesse de
 $75 \text{ km} \cdot \text{h}^{-1}$.

43 a) $h'(x) = 2x - 3x^2 = x(2 - 3x)$

$h'(x) = 0$ si et seulement si $x = 0$ ou $x = \frac{2}{3}$.

x	0	$\frac{2}{3}$	1	
$h'(x)$	0	+	0	-
$h(x)$	0	$\frac{4}{27}$	0	

b) 0 est le minimum de h sur l'intervalle $[0 ; 1]$, donc $h(x) \geq 0$ sur $[0 ; 1]$.

c) La position relative, dans un repère, de la courbe représentative de la fonction $x \mapsto x^2$ et de la courbe représentative de la fonction $x \mapsto x^3$ est donnée par le signe de $x^2 - x^3$ c'est-à-dire de $h(x)$. Or d'après **b)**, pour tout x de l'intervalle $[0 ; 1]$, $h(x) \geq 0$ donc $x^2 \geq x^3$. Ainsi la courbe de la fonction carrée est située au-dessus de celle de la fonction cube sur $[0 ; 1]$.

76 a) $B'(x) = -3x^2 + 20x + 3\,000$.

Sur $[0 ; 50]$, $B'(x) = 0$ si et seulement si

$$x_0 = \frac{10 + 10\sqrt{91}}{3} \approx 35,131$$

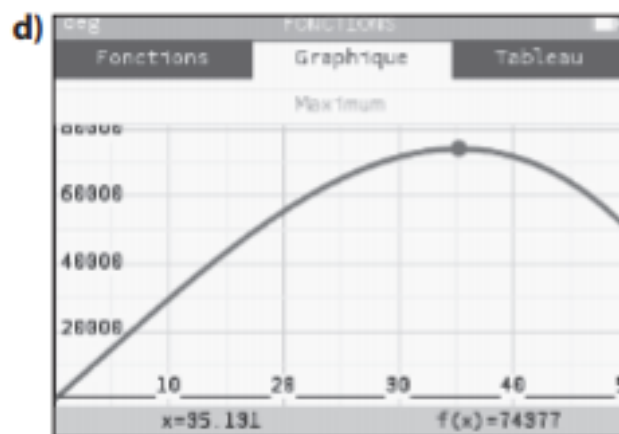
x	0	x_0	50
$B'(x)$	+	0	-

b)

x	0	x_0	50
$B(x)$	0	$B(x_0)$	50\,000

$B(x_0) \approx 74\,377$.

c) D'après le tableau de variations de B , le bénéfice est maximal pour 35,131 tonnes pour un bénéfice d'environ 74 377 €.



81 1. a) Pour tout nombre réel $x \geq 0$,

$$\begin{aligned} h'(x) &= \frac{2(x^2 + 9) - 2x \times 2x}{(x^2 + 9)^2} = \frac{2(-x^2 + 9)}{(x^2 + 9)^2} \\ &= \frac{2(3 + x)(3 - x)}{(x^2 + 9)^2} \end{aligned}$$

b) Pour tout nombre réel $x \geq 0$, $2(3 + x) > 0$ et $(x^2 + 9)^2 > 0$ donc le signe de $h'(x)$ est celui de $3 - x$.

c) $3 - x = 0$ si et seulement si $x = 3$.

On dresse le tableau de variations de h .

x	0	3	$+\infty$
$h'(x)$	+	0	-
$h(x)$	0	$\frac{1}{3}$	

2. a) Le maximum de h sur l'intervalle $[0 ; +\infty[$ est $\frac{1}{3}$ donc pour tout nombre réel $x \geq 0$, $h(x) \leq \frac{1}{3}$.

b) La fonction h est décroissante sur l'intervalle $[5 ; +\infty[$, donc pour tout $x \geq 5$, $h(x) \leq h(5)$ c'est-à-dire $h(x) \leq \frac{5}{17}$. Or $\frac{5}{17} \leq 0,3$ et pour tout $x \geq 5$,

$2x \geq 0$ et $x^2 + 9 > 0$ donc $0 \leq h(x) \leq 0,3$.