Mathématiques 2^{nd}	**Chapitre 11 : Vecteurs et coordonnées**	**Géométrie**

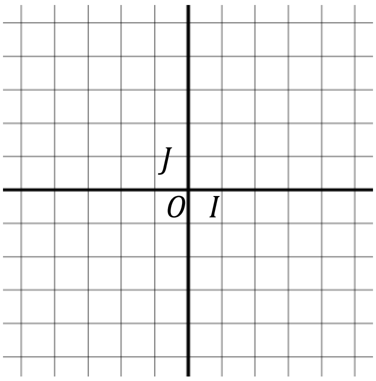
I – Points et vecteurs dans un repère :

a) Coordonnées d'un point dans un repère orthonormé :

Un repère orthonormé d'origine O est un triplet $(O\,;I,J)$ tel que le triangle OIJ est rectangle isocèle en O.
Tout point M est repéré par un unique couple de coordonnées $(x\,;y)$.

- le nombre x est appelé l'abscisse de M ;
- le nombre y est appelé l'ordonnée de M ;

❖ **Exemple :**



Placer les trois points dont voici les coordonnées :

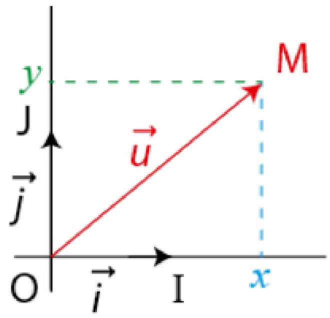
$E(3\,;2)$ $F(2\,;-3)$ $G(-1\,;2{,}5)$

b) Coordonnées d'un vecteur dans un base orthonormé :

Un repère orthonormé (O,I,J) peut aussi se noter $(O,\vec{\imath},\vec{\jmath})$ où $\vec{\imath}=\overrightarrow{OI}$ et $\vec{\jmath}=\overrightarrow{OJ}$.

On dit que $(\vec{\imath},\vec{\jmath})$ est une **base orthonormée** si les directions des vecteurs sont perpendiculaires et si la norme des deux vecteurs est égale à 1.

Dans un repère (O, I, J), les **coordonnées** du vecteur $\vec{u}$ sont celles du point M tel que $\overrightarrow{OM}=\vec{u}$.



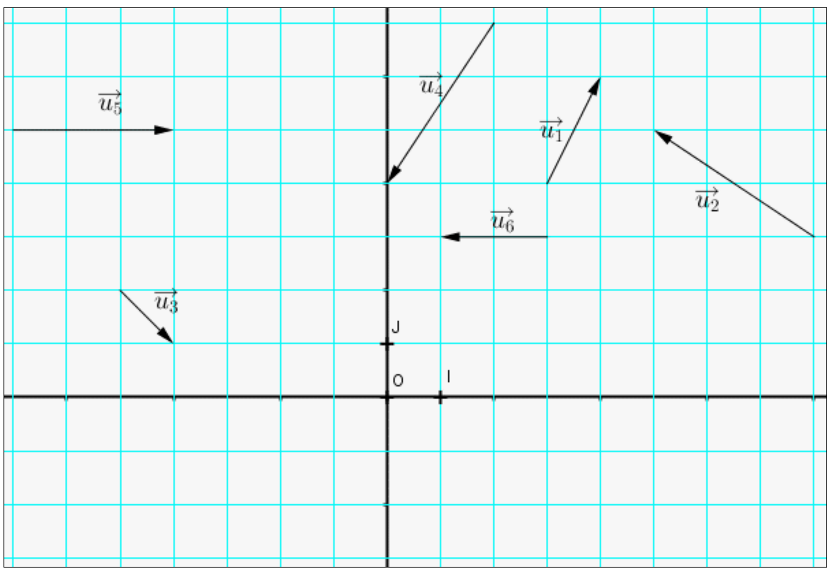
Remarques : $\vec{\imath}$ a pour coordonnées (1 ; 0) et $\vec{\jmath}$ a pour coordonnées (0 ; 1).

❖ Exemple : Soit (O,I,J) un repère

1) Donner les coordonnées des vecteurs $\overrightarrow{u_1}$ à $\overrightarrow{u_6}$.

$\overrightarrow{u_1}$ (;)	$\overrightarrow{u_2}$ (;)
$\overrightarrow{u_3}$ (;)	$\overrightarrow{u_4}$ (;)
$\overrightarrow{u_5}$ (;)	$\overrightarrow{u_6}$ (;)

2) Soit $\overrightarrow{u_7}\begin{pmatrix}-2\\2\end{pmatrix}$ représenter ce vecteur dans le repère.

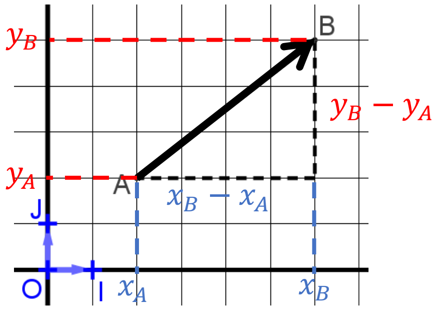


II – Formules de géométrie repérée :

☐ **Calculer les coordonnées d'un vecteur**

Soient $A(x_A\ ;\ y_A)$ et $B(x_B\ ;\ y_B)$ deux points d'un repère.
Alors les coordonnées du vecteur $\overrightarrow{AB}$ sont $(x_B - x_A\ ;\ y_B - y_A)$.

Deux vecteurs sont égaux si et seulement si ces vecteurs ont les mêmes coordonnées dans un repère du plan.



Attention ! Toujours « $extrémité - origine$ »

❖ Exemple :

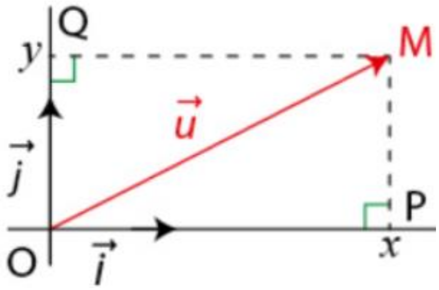
Sur la figure, on a $\overrightarrow{\boldsymbol{AB}}\begin{pmatrix} \boldsymbol{x_B - x_A} \\ \boldsymbol{y_B - y_A} \end{pmatrix}$ =

❖ **Méthode : déterminer si deux vecteurs sont égaux à l'aide des coordonnées**

Soients $\mathrm{A}(5;-2)$, $\mathrm{B}(4;1)$, $\mathrm{C}(8;0)$ et $\mathrm{D}(7;3)$. Les vecteurs $\overrightarrow{\mathrm{AB}}$ et $\overrightarrow{\mathrm{CD}}$ sont-ils égaux ?

❖ **Méthode: trouver les coordonnées d'un point à partir d'une égalité vectorielle.**

Soient $A(3;-2)$,$E(-4,\frac{3}{2})$ et $P(\frac{1}{2},5)$. Donner les coordonnées du point M tel que $\overrightarrow{AM} = \overrightarrow{EP}$



☐ **Norme d'un vecteur**

Soit, dans un repère orthonormé $(O,\vec{\imath},\vec{\jmath})$ le vecteur $\vec{u}(x;y)$.
La norme du vecteur $\vec{u}$, est égale à $||\vec{\boldsymbol{u}}|| = \sqrt{\boldsymbol{x}^2 + \boldsymbol{y}^2}$.

❖ **Démonstration**

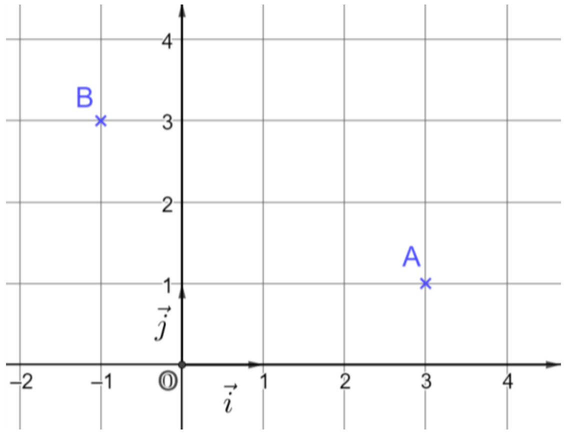
Cas où $x > 0$ et $y > 0$
On note $M(x\,;y)$, $P(x,0)$ et $Q(0\,;y)$. Dans le triangle OMP rectangle en P, d'après le théorème de Pythagore, on a :
$OM^2 = OP^2 + PM^2$ or $OP = x$ et $PM = OQ = y$, donc $OM^2 = x^2 + y^2$.
Alors $||\vec{u}|| = OM = \sqrt{x^2 + y^2}$ car OM est un nombre positif.

❖ **Exemple :** Déterminer les normes des vecteurs $\vec{u}(3;4)$ et $\vec{v}(5;1)$

❖ **Conséquence :**

Soients $A(x_A\ ;\ y_A)$ et $B(x_B\ ;\ y_B)$ deux points d'un repère orthonormé.
La longueur AB est $\boldsymbol{AB} = \|\overrightarrow{\boldsymbol{AB}}\| = \sqrt{(\boldsymbol{x_B - x_A})^2 + (\boldsymbol{y_B - y_A})^2}$

Le plan est muni d'un repère $(O\,;\vec{\imath}\,;\,\vec{\jmath})$, déterminer la norme du vecteur $\overrightarrow{AB}$

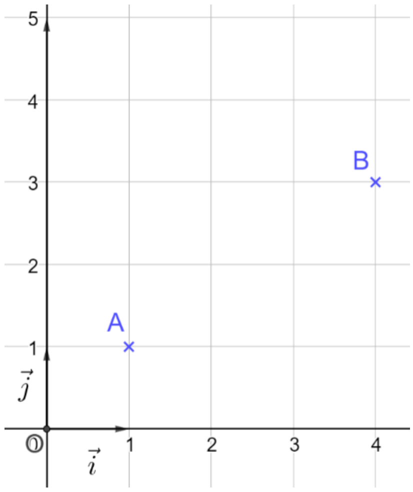


☐ Coordonnées du milieu d'un segment

Soient deux points $A(x_A\,;y_A)$ et $B(x_B\,;y_B)$.
Le milieu I du segment $[AB]$ a pour coordonnées :

$$\boldsymbol{I}\left(\frac{x_A+x_B}{2}\,;\frac{y_A+y_B}{2}\right)$$

❖ **Exemple :** Le plan est muni d'un repère $(O\,;\vec{\imath}\,;\,\vec{\jmath})$, déterminer les coordonnées du point I milieu du segment [AB]



❖ **Démonstration des coordonnées du milieu:** I est le milieu de $[AB]$ donc $2\overrightarrow{AI} = \overrightarrow{AB}$. Or $\overrightarrow{AI}\begin{pmatrix} x_I - x_A \\ y_I - y_A \end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix} x_B - x_A \\ y_B - y_A \end{pmatrix}$

$$\begin{cases} 2(x_I - x_A) = x_B - x_A \\ 2(y_I - y_A) = y_B - y_A \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x_I = x_A + x_B \\ 2y_I = y_A + y_B \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_I = \frac{x_A+x_B}{2} \\ y_I = \frac{y_A+y_B}{2} \end{cases}$$

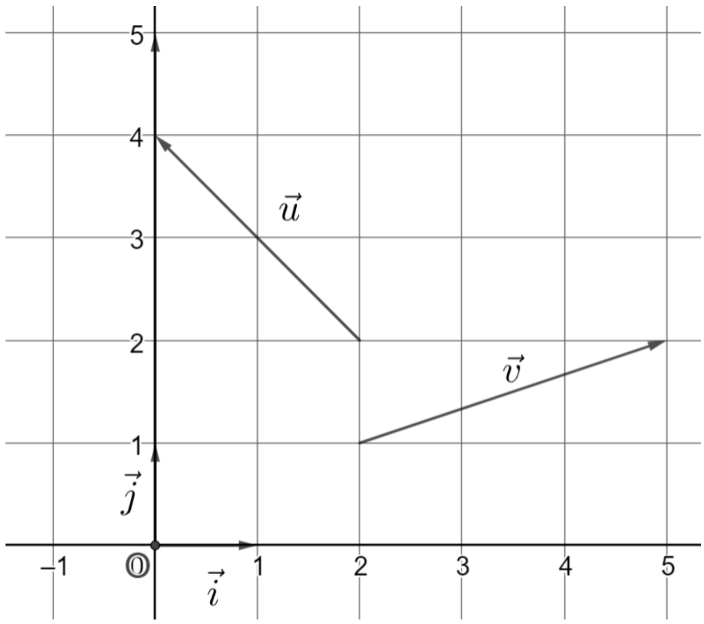
III – Opérations sur les vecteurs et coordonnées :

☐ Coordonnées de $\vec{u}+\vec{v}$ et $k\vec{u}$

Soient $\vec{u}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ et $\vec{v}\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}$ deux vecteurs. Soit k un nombre réel, alors : $\boldsymbol{\vec{u}+\vec{v}\begin{pmatrix} x+x' \\ y+y' \end{pmatrix}}$ $\qquad$ $\boldsymbol{k\vec{u}\begin{pmatrix} kx \\ ky \end{pmatrix}}$

❖ **Exercice 1:**

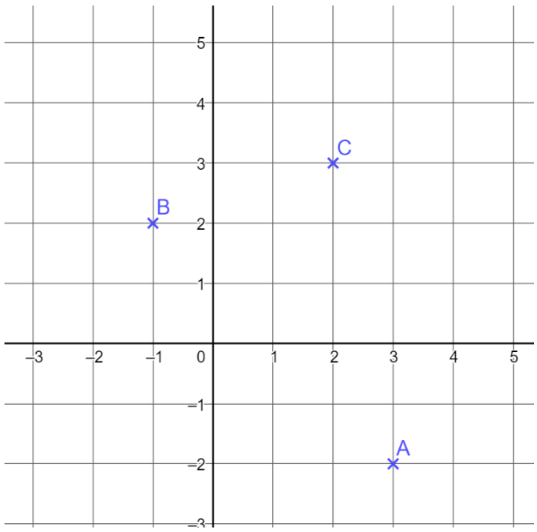
Calculer les coordonnées du vecteur $\vec{u}+\vec{v}$. Représenter le vecteur $\vec{u}+\vec{v}$ puis vérifier votre résultat précédent.



❖ **Exercice 2:**

1) Construire les vecteurs et lire graphiquement leurs coordonnées.

$\overrightarrow{AB}$; $\overrightarrow{BC}$; $\overrightarrow{BD} = 2\overrightarrow{BC}$; $\overrightarrow{AI} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AB}$



2) Vérifier les coordonnées des vecteurs précédents par le calcul.

$\overrightarrow{AB}$	$\overrightarrow{BC}$
$\overrightarrow{AI}$	$\overrightarrow{BD}$

IV – Vecteurs colinéaires :

a) Définition des vecteurs colinéaires :

Soient deux vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$.

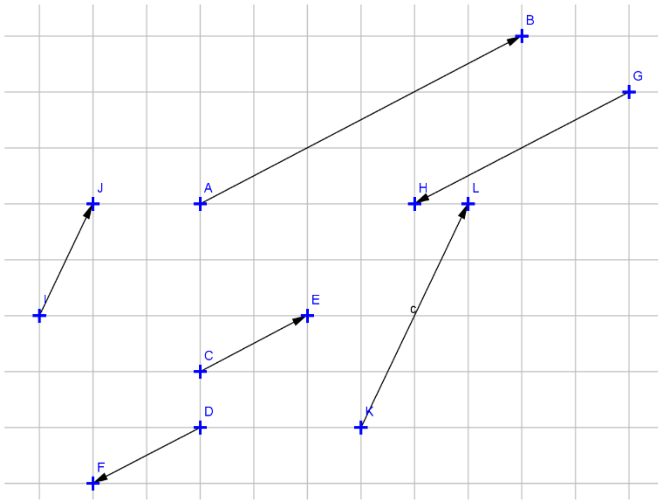
$\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont colinéaires si et seulement si ils ont la même direction.

Cela signifie **qu'il existe un réel k** tel que $\vec{v} = k\vec{u}$.

Exercice :

Indiquer les vecteurs colinéaires de la figure

Exprimer les vecteurs colinéaires de la figure en fonction de $\overrightarrow{IJ}$ ou de $\overrightarrow{CE}$ ou de $\overrightarrow{AB}$



b) Propriété de colinéarité des vecteurs :

Soient $\vec{u}$ et $\vec{v}$ dans un repère.

Deux vecteurs $\vec{u}\binom{x}{y}$ et $\vec{v}\binom{x'}{y'}$ sont colinéaires si et seulement si leurs coordonnées sont proportionnelles

Deux vecteurs $\vec{u}\binom{x}{y}$ et $\vec{v}\binom{x'}{y'}$ sont colinéaires si et seulement si $xy' - x'y = 0$

❖ Vocabulaire : Le nombre $xy' - yx'$ est appelé **déterminant** du vecteur $\vec{u}$ et du vecteur $\vec{v}$ et est noté det $(\vec{u},\vec{v})$.

❖ Exemple : Les vecteurs $\vec{u}\binom{7}{3}$ et $\vec{v}\binom{5}{2}$ sont-ils colinéaires ?

c) Propriété de parallélisme :

Deux droites (AB) et (CD) sont parallèles si et seulement si les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{CD}$ sont colinéaires.

- Exercice : Soient $A(-2\ ;\ 3)$, $B(1\ ;\ 4)$, $C(-7\ ;\ 2)$ et $D(-1\ ;\ 4)$. Les droites (AB) et (CD) sont-elles parallèles ?

d) Propriété de parallélisme :

Trois points A, B et C sont alignés si et seulement si les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ sont colinéaires.

- Exercice : Soient $A(-2\ ;\ 3)$, $B(1\ ;\ 4)$ et $C(7\ ;\frac{11}{2})$. Les points A, B et C sont-ils alignés ?