Mathématiques 2nd	**Chapitre 11 : Vecteurs et coordonnées**	**Géométrie**

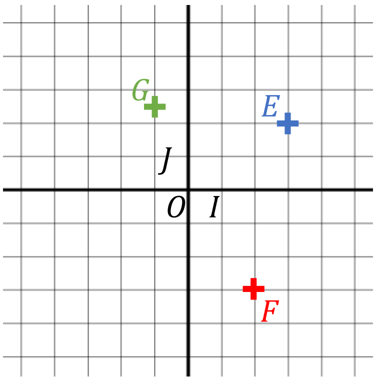
I – Points et vecteurs dans un repère :

a) Coordonnées d'un point dans un repère orthonormé :

Un repère orthonormé d'origine O est un triplet $(O\,;I,J)$ tel que le triangle OIJ est rectangle isocèle en O.
Tout point M est repéré par un unique couple de coordonnées $(x\,;y)$.

- le nombre x est appelé l'abscisse de M ;
- le nombre y est appelé l'ordonnée de M ;

❖ **Exemple :**



Placer les trois points dont voici les coordonnées :

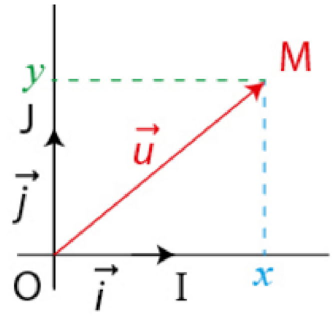
$E(3\,;2)$ $F(2\,;-3)$ $G(-1\,;2{,}5)$

b) Coordonnées d'un vecteur dans un base orthonormé :

Un repère orthonormé (O,I,J) peut aussi se noter $(O,\vec{\imath},\vec{\jmath})$ où $\vec{\imath}=\overrightarrow{OI}$ et $\vec{\jmath}=\overrightarrow{OJ}$.

On dit que $(\vec{\imath},\vec{\jmath})$ est une **base orthonormée** si les directions des vecteurs sont perpendiculaires et si la norme des deux vecteurs est égale à 1.

Dans un repère (O, I, J), les **coordonnées** du vecteur $\vec{u}$ sont celles du point M tel que $\overrightarrow{OM}=\vec{u}$.

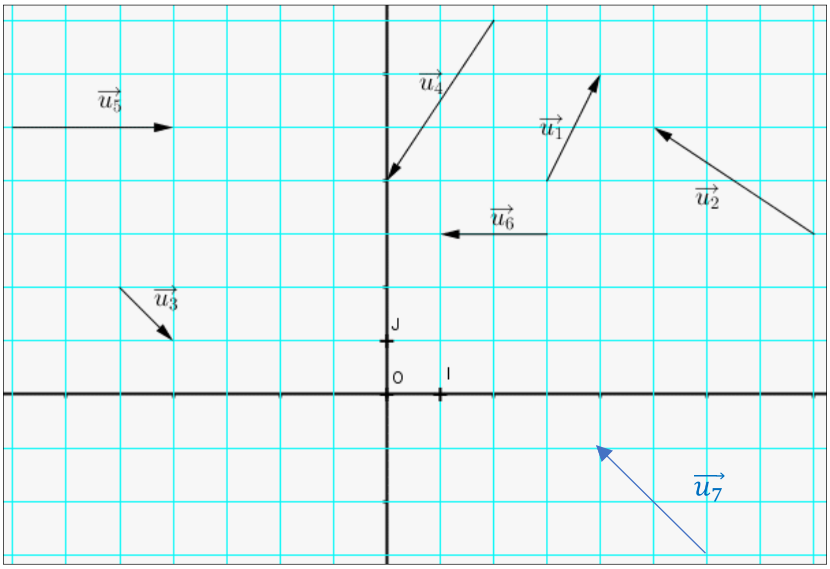


Remarques : $\vec{\imath}$ a pour coordonnées (1 ; 0) et $\vec{\jmath}$ a pour coordonnées (0 ; 1).

❖ Exemple : Soit (O,I,J) un repère

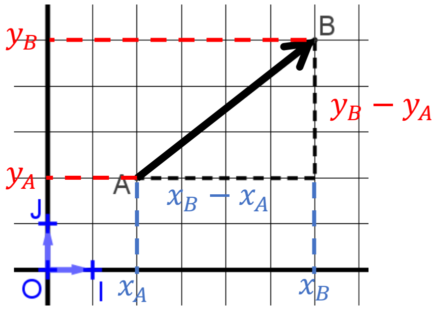
1) Donner les coordonnées des vecteurs $\overrightarrow{u_1}$ à $\overrightarrow{u_6}$.

$\overrightarrow{u_1}\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix}$	$\overrightarrow{u_2}\begin{pmatrix}-3\\2\end{pmatrix}$
$\overrightarrow{u_3}\begin{pmatrix}1\\-1\end{pmatrix}$	$\overrightarrow{u_4}\begin{pmatrix}-2\\-3\end{pmatrix}$
$\overrightarrow{u_5}\begin{pmatrix}3\\0\end{pmatrix}$	$\overrightarrow{u_6}\begin{pmatrix}-2\\0\end{pmatrix}$



2) Soit $\overrightarrow{u_7}\begin{pmatrix}-2\\2\end{pmatrix}$ représenter ce vecteur dans le repère.

II – Formules de géométrie repérée :



☐ **Calculer les coordonnées d'un vecteur**

Soient $A(x_A\ ;\ y_A)$ et $B(x_B\ ;\ y_B)$ deux points d'un repère.
Alors les coordonnées du vecteur $\overrightarrow{AB}$ sont $(x_B - x_A\ ;\ y_B - y_A)$.

Deux vecteurs sont égaux si et seulement si ces vecteurs ont les mêmes coordonnées dans un repère du plan.

Attention ! Toujours « $extrémité - origine$ »

❖ Exemple :

Sur la figure, on a $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix} x_B - x_A \\ y_B - y_A \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6-2 \\ 5-2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \end{pmatrix}$

❖ **Méthode : déterminer si deux vecteurs sont égaux à l'aide des coordonnées**

Soients $\mathrm{A}(5;-2)$, $\mathrm{B}(4;1)$, $\mathrm{C}(8;0)$ et $\mathrm{D}(7;3)$. Les vecteurs $\overrightarrow{\mathrm{AB}}$ et $\overrightarrow{\mathrm{CD}}$ sont-ils égaux ?

On a: $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix} x_B - x_A \\ y_B - y_A \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{CD}\begin{pmatrix} 7-8 \\ 3-0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \end{pmatrix}$

Les deux vecteurs ont les mêmes coordonnées, ils sont donc égaux.

❖ **Méthode: trouver les coordonnées d'un point à partir d'une égalité vectorielle.**

Soients $A(3;-2)$,$E(-4,\frac{3}{2})$ et $P(\frac{1}{2},5)$. Donner les coordonnées du point M tel que $\overrightarrow{AM} = \overrightarrow{EP}$

On a $\overrightarrow{EP}\begin{pmatrix} x_P - x_E \\ y_P - y_E \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0{,}5-(-4) \\ 5-1{,}5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4{,}5 \\ 3{,}5 \end{pmatrix}$.

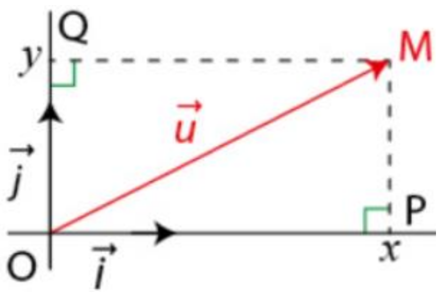
On pose M $(x_M;y_M)$ on a alors $\overrightarrow{AM}\begin{pmatrix} x_M - 3 \\ y_M + 2 \end{pmatrix}$, comme $\overrightarrow{AM} = \overrightarrow{EP}$ donc les vecteurs ont les mêmes coordonnées il faut donc résoudre :

$$\begin{cases} \mathrm{x_M} - 3 = 4{,}5 \\ \mathrm{y_M} + 2 = 3{,}5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \mathrm{x_M} = 4{,}5 + 3 = 7.5 \\ \mathrm{y_M} = 3{,}5 - 2 = 1{,}5 \end{cases}$$

donc les coordonnées cherchées sont $M\ (7{,}5\ ;\ 1{,}5\ )$

☐ **Norme d'un vecteur**

Soit, dans un repère orthonormé $(O,\vec{\imath},\vec{\jmath})$ le vecteur $\vec{u}(x;y)$.
La norme du vecteur $\vec{u}$, est égale à $\|\vec{u}\| = \sqrt{x^2+y^2}$.



❖ **Démonstration**

Cas où $x > 0$ et $y > 0$

On note $M(x\,;y)$, $P(x,0)$ et $Q(0\,;y)$. Dans le triangle OMP rectangle en P, d'après le théorème de Pythagore, on a :
$OM^2 = OP^2 + PM^2$ or $OP = x$ et $PM = OQ = y$, donc $OM^2 = x^2 + y^2$.
Alors $\|\vec{u}\| = OM = \sqrt{x^2+y^2}$ car OM est un nombre positif.

❖ **Exemple :** Déterminer les normes des vecteurs $\vec{u}(3;4)$ et $\vec{v}(5;1)$

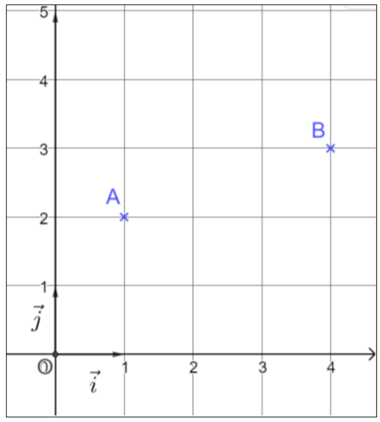
$\|\vec{u}\| = \sqrt{3^2+4^2} = 5$ et $\|\vec{v}\| = \sqrt{5^2+1^2} = \sqrt{26}$

❖ **Conséquence :**

Soient $A(x_A\ ;\ y_A)$ et $B(x_B\ ;\ y_B)$ deux points d'un repère orthonormé.
La longueur AB est $\boldsymbol{AB} = \|\overrightarrow{\boldsymbol{AB}}\| = \sqrt{(\boldsymbol{x_B}-\boldsymbol{x_A})^2 + (\boldsymbol{y_B}-\boldsymbol{y_A})^2}$

❖ **Exemple :**

Le plan est muni d'un repère $(O\,;\vec{\imath}\,;\,\vec{\jmath})$, déterminer la norme du vecteur $\overrightarrow{AB}$



On a A(1 ; 2) et B(4 ; 3) , donc

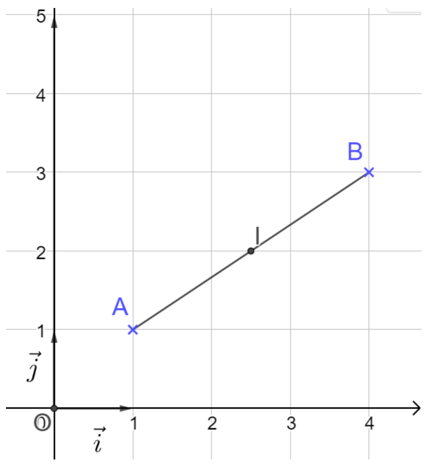
$$\|\overrightarrow{AB}\| = \sqrt{(4-1)^2+(3-2)^2} = \sqrt{3^2+1^2} = \sqrt{10}$$

☐ **Coordonnées du milieu d'un segment**

Soient deux points $A(x_A\,;y_A)$ et $B(x_B\,;y_B)$.
Le milieu I du segment $[AB]$ a pour coordonnées :

$$\boldsymbol{I}\left(\frac{x_A+x_B}{2}\,;\frac{y_A+y_B}{2}\right)$$

❖ **Exemple :** Le plan est muni d'un repère $(O\,;\vec{\imath}\,;\,\vec{\jmath})$, déterminer les coordonnées du point I milieu du segment [AB]



On a A(1 ; 1) et B(4 ; 3) , donc

$$\mathrm{I}\left(\frac{x_A+x_B}{2} = \frac{1+4}{2} = 2{,}5\,;\frac{y_A+y_B}{2} = \frac{3+1}{2} = \frac{4}{2} = 2\right) \text{ soit } \mathrm{I}(2{,}5\,;\,2)$$

❖ **Démonstration des coordonnées du milieu:** I est le milieu de $[AB]$ donc $2\overrightarrow{AI} = \overrightarrow{AB}$.
Or $\overrightarrow{AI}\begin{pmatrix}x_I-x_A\\y_I-y_A\end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}x_B-x_A\\y_B-y_A\end{pmatrix}$

$$\begin{cases}2(x_I-x_A) = x_B-x_A\\2(y_I-y_A) = y_B-y_A\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}2x_I = x_A+x_B\\2y_I = y_A+y_B\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}x_I = \frac{x_A+x_B}{2}\\y_I = \frac{y_A+y_B}{2}\end{cases}$$

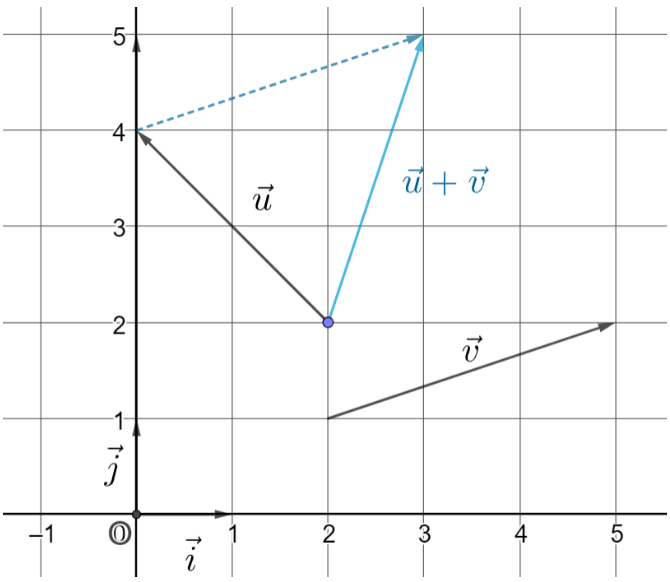
III – Opérations sur les vecteurs et coordonnées :

☐ **Coordonnées de $\vec{u}+\vec{v}$ et $k\vec{u}$**

Soient $\vec{u}\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}$ et $\vec{v}\begin{pmatrix}x'\\y'\end{pmatrix}$ deux vecteurs. Soit k un nombre réel, alors : $\boldsymbol{\vec{u}+\vec{v}\begin{pmatrix}x+x'\\y+y'\end{pmatrix}}$ $\boldsymbol{k\vec{u}\begin{pmatrix}kx\\ky\end{pmatrix}}$

❖ **Exercice 1:**

Calculer les coordonnées du vecteur $\vec{u}+\vec{v}$. Représenter le vecteur $\vec{u}+\vec{v}$ puis vérifier votre résultat précédent.



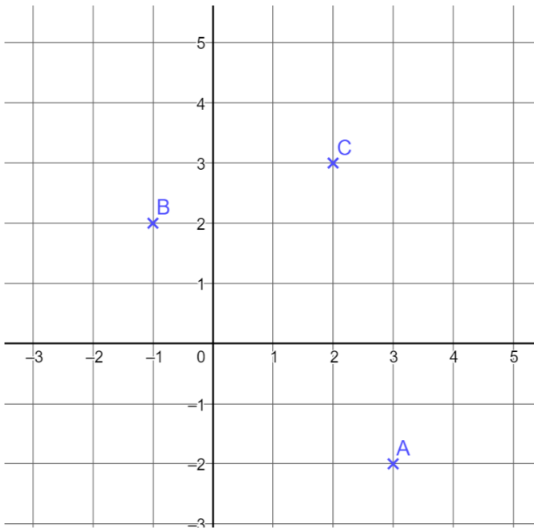
On a $\vec{u}(-2;2)$ et $\vec{v}(3;1)$

Alors $\vec{u}+\vec{v}\,(-2+3;\ 2+1)$ donc $\vec{u}+\vec{v}(1;3)$.

❖ **Exercice 2:**

1) Construire les vecteurs et lire graphiquement leurs coordonnées.

$\overrightarrow{AB}$; $\overrightarrow{BC}$; $\overrightarrow{BD} = 2\overrightarrow{BC}$; $\overrightarrow{AI} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AB}$



2) Vérifier les coordonnées des vecteurs précédents par le calcul.

$\overrightarrow{AB}(-4;4)$	$\overrightarrow{BC}\ (3;1)$
$\overrightarrow{AI}\ \left(\frac{-4}{2};\frac{4}{2}\right) = (-2;2)$	$\overrightarrow{BD}\ (2\times 3; 2\times 1) = (6;2)$

IV – Vecteurs colinéaires :

a) Définition des vecteurs colinéaires :

Soient deux vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$.

$\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont colinéaires si et seulement si ils ont la même direction.

Cela signifie **qu'il existe un réel k** tel que $\vec{v} = k\vec{u}$.

Exercice :

Indiquer les vecteurs colinéaires de la figure

$\overrightarrow{CE}$ et $\overrightarrow{DF}$

$\overrightarrow{IJ}$ et $\overrightarrow{KL}$

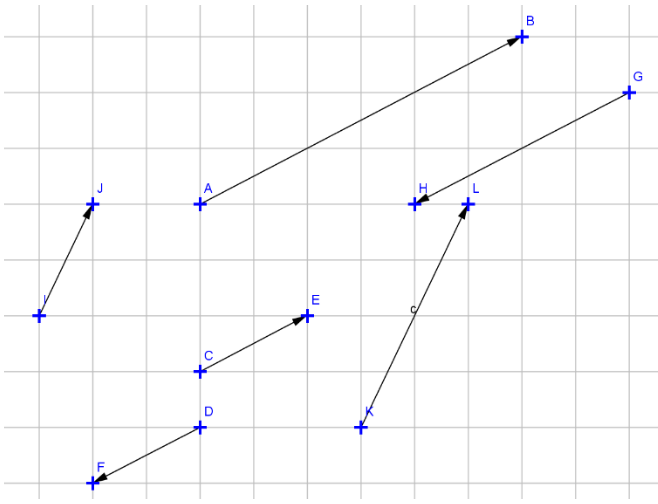
$\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{GH}$

Exprimer les vecteurs colinéaires de la figure en fonction de $\overrightarrow{IJ}$ ou de $\overrightarrow{CE}$ ou de $\overrightarrow{AB}$

$\overrightarrow{DF} = -\overrightarrow{CE}$

$\overrightarrow{KL} = 2\overrightarrow{IJ}$

$\overrightarrow{GH} = \frac{2}{3}\overrightarrow{AB}$



b) Propriété de colinéarité des vecteurs :

Soient $\vec{u}$ et $\vec{v}$ dans un repère.

Deux vecteurs $\vec{u}\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}$ et $\vec{v}\begin{pmatrix}x'\\y'\end{pmatrix}$ sont colinéaires si et seulement si leurs coordonnées sont proportionnelles

Deux vecteurs $\vec{u}\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}$ et $\vec{v}\begin{pmatrix}x'\\y'\end{pmatrix}$ sont colinéaires si et seulement si $xy' - x'y = 0$

❖ Vocabulaire : Le nombre $xy' - yx'$ est appelé **déterminant** du vecteur $\vec{u}$ et du vecteur $\vec{v}$ et est noté det $(\vec{u},\vec{v})$.

❖ Exemple : Les vecteurs $\vec{u}\binom{7}{3}$ et $\vec{v}\binom{5}{2}$ sont-ils colinéaires ?

Non puisque $\det(\vec{u},\vec{v}) = xy' - yx' = 7\times 2 - 3\times 5 = -1 \neq 0.$

c) Propriété de parallélisme :

Deux droites (AB) et (CD) sont parallèles si et seulement si les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{CD}$ sont colinéaires.

❖ Exercice : Soient $A(-2\ ;\ 3)$, $B(1\ ;\ 4)$, $C(-7\ ;\ 2)$ et $D(-1\ ;\ 4)$. Les droites (AB) et (CD) sont-elles parallèles ?

$\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix} x_B - x_A \\ y_B - y_A \end{pmatrix}$ donc $\overrightarrow{AB}\binom{1-(-2)}{4-3}$ soit $\overrightarrow{AB}\binom{3}{1}$; et $\overrightarrow{CD}\binom{-1-(-7)}{4-2}$ donc $\overrightarrow{CD}\binom{6}{2}$.

d'après leurs coordonnées, $\overrightarrow{CD} = 2\overrightarrow{AB}$ donc les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{CD}$ sont colinéaires.

On en conclut que les droites (AB) et (CD) sont parallèles.

d) Propriété de parallélisme :

Trois points A, B et C sont alignés si et seulement si les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ sont colinéaires.

❖ Exercice : Soient $A(-2\ ;\ 3)$, $B(1\ ;\ 4)$ et $C(7\ ;\frac{11}{2})$. Les points A, B et C sont-ils alignés ?

$\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix} x_B - x_A \\ y_B - y_A \end{pmatrix}$ donc $\overrightarrow{AB}\binom{1-(-2)}{4-3}$ soit $\overrightarrow{AB}\binom{3}{1}$ et $\overrightarrow{AC}\begin{pmatrix} 7-(-2) \\ \frac{11}{2}-3 \end{pmatrix}$ donc $\overrightarrow{AC}\begin{pmatrix} 9 \\ 5/2 \end{pmatrix}$.

$\det(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}) = xy' - yx' = 3 \times \frac{5}{2} - 1 \times 9 = \frac{15}{2} - 9 = \frac{15}{2} - \frac{18}{2} = -\frac{3}{2} \neq 0.$

Donc les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ ne sont pas colinéaires.

On conclut que les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ ne sont pas colinéaires donc les points A, B et C ne sont pas alignés.