

Mathématiques 1 ^{ère} EDS	Chapitre 10 : Comportement d'une suite	Algèbre
---------------------------------------	--	---------

I – Étude du sens de variation d'une suite :

a) Sens de variation d'une suite :

Définition :

- La suite (u_n) est **croissante** à partir du rang p si pour tout entier $n \geq p$ on a $u_{n+1} \geq u_n$.
- La suite (u_n) est **décroissante** à partir du rang p si pour tout entier $n \geq p$ on a $u_{n+1} \leq u_n$.
- La suite (u_n) est monotone à partir du rang p si elle est soit croissante soit décroissante à partir du rang p .
- La suite (u_n) est **constante** à partir du rang p si pour tout entier $n \geq p$ on a $u_{n+1} = u_n$.

❖ Remarques :

- Comme pour les fonctions, si on remplace les inégalités larges par des inégalités strictes, on parle de suite strictement croissante, strictement décroissante, ou strictement monotone.
- Il existe des suites qui ne sont pas monotones, comme la suite (u_n) définie par $u_n = (-1)^n$

b) Etude du signe de la différence : $u_{n+1} - u_n$.

Pour étudier le sens de variation d'une suite, on peut étudier le signe de la différence entre deux termes consécutifs quelconques :

Propriété :

- Si pour tout entier $n \geq p$ on a $u_{n+1} - u_n \geq 0$ alors la suite (u_n) est **croissante** à partir du rang p .
- Si pour tout entier $n \geq p$ on a $u_{n+1} - u_n \leq 0$ alors la suite (u_n) est **décroissante** à partir du rang p .

Démonstration :

$\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} - u_n \geq 0$ équivaut à $u_{n+1} \geq u_n$, donc la suite (u_n) est croissante.

$\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} - u_n \leq 0$ équivaut à $u_{n+1} \leq u_n$, donc la suite (u_n) est décroissante.

❖ Exercice :

Etudier le sens de variation des suites suivantes définie, pour tout $n \in \mathbb{N}$ par :

a) $u_{n+1} = u_n + n^2 + 1$ b) $v_n = n^2 + n$

a) $\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} - u_n = n^2 + 1$, or $n^2 + 1 > 0$, donc la suite (u_n) est strictement croissante.

b) $\forall n \in \mathbb{N}, v_{n+1} - v_n = (n+1)^2 + (n+1) - (n^2 + n) = n^2 + 2n + 1 + n + 1 - n^2 - n = 2n + 2 > 0$

puisque $n > 0$, donc la suite (v_n) est strictement croissante.

c) Comparaison entre $\frac{u_{n+1}}{u_n}$ et 1 :

Propriété : Soit (u_n) une suite dont **tous les termes sont strictement positifs**.

- Si pour tout entier $n \geq p$ on a $\frac{u_{n+1}}{u_n} \geq 1$, alors $u_{n+1} \geq u_n$ alors la suite (u_n) est **croissante** à partir du rang p .
- Si pour tout entier $n \geq p$ on a $\frac{u_{n+1}}{u_n} \leq 1$, alors $u_{n+1} \leq u_n$ alors la suite (u_n) est **décroissante** à partir du rang

❖ **Exercice :**

Etudier le sens de variation des suites suivantes définie, pour tout $n \in \mathbb{N}$ par :

a) $u_n = 5 \times 3^n$ b) $v_n = \frac{2^n}{5^{n+1}}$

a) $\forall n \in \mathbb{N}, u_n > 0$ et $\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{5 \times 3^{n+1}}{5 \times 3^n} = 3$ ainsi $\frac{u_{n+1}}{u_n} > 1$, donc la suite (u_n) est strictement croissante.

b) $\forall n \in \mathbb{N}, u_n > 0$ et $\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{\frac{2^{n+1}}{5^{n+2}}}{\frac{2^n}{5^{n+1}}} = \frac{2^{n+1}}{5^{n+2}} \times \frac{5^{n+1}}{2^n} = \frac{2^1}{5^1} = \frac{2}{5}$ ainsi $\frac{u_{n+1}}{u_n} < 1$, donc la suite (u_n) est strictement décroissante.

d) Suites du type : $u_n = f(n)$.

Dans le cas où la suite est définie de manière **explicite** par une expression du type $u_n = f(n)$ avec f définie sur l'intervalle $[p; +\infty[$, on utilise la propriété suivante :

Propriété : f est une fonction définie sur l'intervalle $[p; +\infty[$, et pour $n \geq p$, $u_n = f(n)$.

- Si la fonction f est croissante sur $[p; +\infty[$ alors la suite (u_n) est croissante à partir du rang p .
- Si la fonction f est décroissante sur $[p; +\infty[$ alors la suite (u_n) est décroissante à partir du rang p .

Démonstration :

Cas où f est croissante sur $[p; +\infty[$

Pour tout entier $n \geq p$ on a $n+1 \geq n$ qui implique que $f(n+1) \geq f(n)$ car f croissante sur $[p; +\infty[$ donc $u_{n+1} \geq u_n$ et on en déduit que la suite est croissante à partir de p .

On procède de manière analogue dans le cas où f est décroissante.

Remarque :

La réciproque de cette propriété est fautive : en effet la suite (u_n) peut-être croissante alors que f ne l'est pas :

❖ **Exemple :**

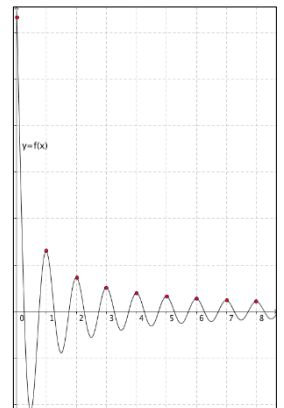
Etudier le sens de variation de la suite (u_n) définie, pour tout $n \in \mathbb{N}$ par $u_n = 2n^2 - 8n + 11$.

$\forall n \in \mathbb{N}, u_n = f(n)$, où $f(n) = 2n^2 - 8n + 11$.

$\forall x \in [0; +\infty[, f'(x) = 4x - 8$, or $4x - 8 \geq 0 \Leftrightarrow x \geq 2$

On en déduit le tableau de variation de f :

x	0	2	$+\infty$
$f'(x)$	—	0	+
$f(x)$	11	3	



La fonction f est croissante sur l'intervalle $[2; +\infty[$, donc la suite (u_n) est croissante à partir du rang $n = 2$.

e) Sens de variation d'une suite arithmétique :

Propriété : Soit (u_n) une suite arithmétique de raison r

- Si $r > 0$ alors la suite (u_n) est croissante.
- Si $r < 0$ alors la suite (u_n) est décroissante.
- Si $r = 0$ alors la suite (u_n) est constante.

Démonstration : $\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} - u_n = r$

Si $r > 0$ alors $u_{n+1} - u_n > 0$ donc la suite (u_n) est strictement croissante.

Si $r < 0$ alors $u_{n+1} - u_n < 0$ donc la suite (u_n) est strictement décroissante.

Si $r = 0$ alors $u_{n+1} - u_n = 0$ donc la suite (u_n) est strictement constante.

❖ **Exemple :**

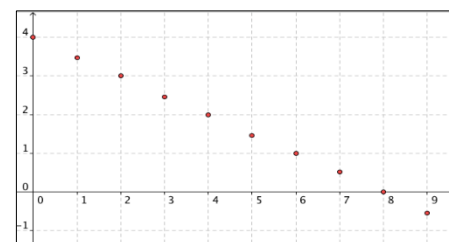
Etudier les variations des suites ci-dessous.

a) (u_n) est une suite arithmétique de raison 2 et de premier terme $v_0 = -3$.

b) (v_n) est définie par $v_0 = 4$ et, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $v_n = 4 - 0,5n$.

a) (u_n) est une suite arithmétique de raison $2 > 0$, donc (u_n) est strictement croissante.

b) (v_n) est une suite arithmétique de raison $-0,5 < 0$, donc (v_n) est strictement décroissante.



f) Sens de variation d'une suite géométrique :

Propriété : Soit (u_n) une suite géométrique de raison q et de premier terme $u_0 \neq 0$

- Si $q > 1$:
 - Si $u_0 > 0$, alors la suite (u_n) est strictement croissante.
 - Si $u_0 < 0$, alors la suite (u_n) est strictement décroissante.
- Si $0 < q < 1$:
 - Si $u_0 > 0$, alors la suite (u_n) est strictement décroissante.
 - Si $u_0 < 0$, alors la suite (u_n) est strictement croissante.
- Si $q = 0$ ou $q = 1$, alors la suite est constante.
- Si $q < 0$, alors la suite n'est pas monotone.

Démonstration dans le cas où $u_0 > 0$:

$$\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} - u_n = u_0 q^{n+1} - u_0 q^n = u_0 q^n (q - 1).$$

– Si $q > 1$ alors $u_{n+1} - u_n > 0$ et la suite (u_n) est croissante.

– Si $0 < q < 1$ alors $u_{n+1} - u_n < 0$ et la suite (u_n) est décroissante.

❖ **Exemple :**

Etudier les variations des suites ci-dessous.

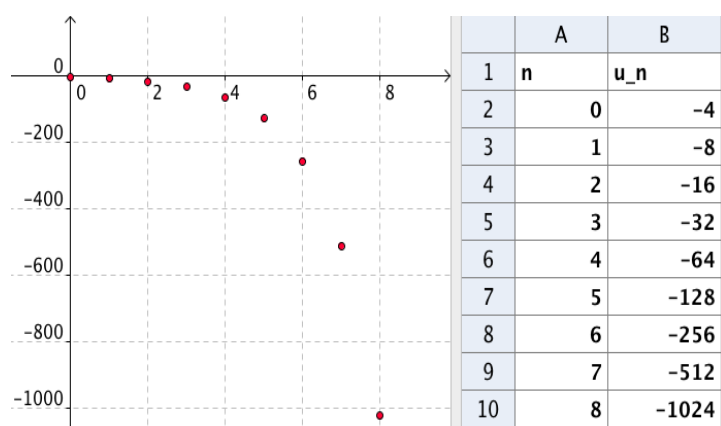
a) (u_n) est une suite géométrique de raison 5 et de premier terme $u_0 = 3$.

b) (v_n) est définie par $v_0 = -4$ et, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $v_n = -4 \times 2^n$.

a) (u_n) est une suite géométrique de raison $5 > 0$, et de premier terme $u_0 = 3 > 0$ donc (u_n) est strictement croissante.

b) (v_n) est une suite géométrique de raison $q = 2 > 1$ et de premier terme

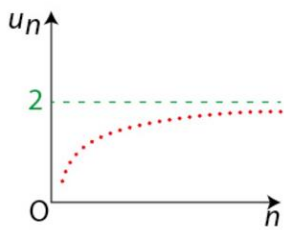
$v_0 = -4 < 0$, donc (v_n) est strictement décroissante.



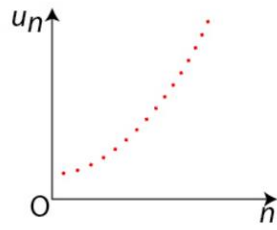
II – Notion de limite de suite:

a) Différentes situations:

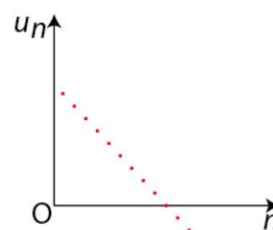
On se propose d'observer le comportement des termes u_n d'une suite lorsque n prend des valeurs de plus en plus grandes. Plusieurs situations peuvent se présenter.



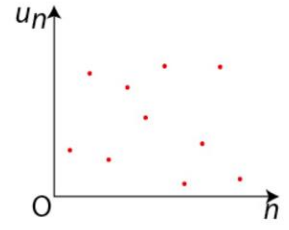
- Les termes u_n sont de plus en plus proches de 2.



- Les termes u_n sont de plus en plus grands.



- Les nombres $-u_n$ sont de plus en plus grands.



- Les termes u_n semblent se disperser.

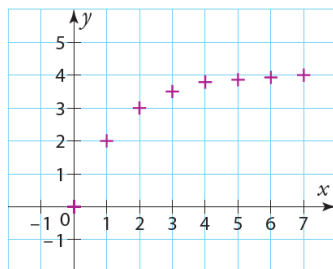
b) Suite convergente : Suite ayant pour limite un nombre réel.

Définition :

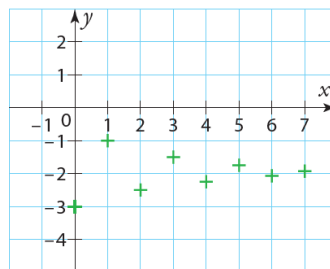
Une suite (u_n) a pour limite un réel l quand n tend vers $+\infty$, si les termes u_n deviennent tous aussi proches de l que l'on veut en prenant n suffisamment grand.

On dit u_n converge vers l et on note que $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = l$

❖ Exemples :



- ① On observe que les termes successifs de (u_n) semblent se rapprocher de 4, donc on peut penser que $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = 4$.



- ② On observe que les termes successifs de (u_n) semblent se rapprocher de -2, donc on peut penser que $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = -2$.

❖ Exercice :

Conjecturer la limite de la suite (u_n) définie pour tout n de $\mathbb{N}^*$, par : $u_n = \frac{2n+1}{n}$

On construit le tableau de valeurs avec des termes de la suite :

n	1	2	3	4	5	10	15	50	500
u_n	3	2,5	2,333	2,25	2,2	2,1	2,067	2,02	2,002

Quand n prend des valeurs de plus en plus grandes, les termes u_n se rapprochent de la valeur 2. Donc on peut conjecturer que la suite (u_n) converge vers 2 et on note : $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = 2$

c) Suite divergente : Suite ayant pour limite $+\infty$ ou $-\infty$.

Définition :

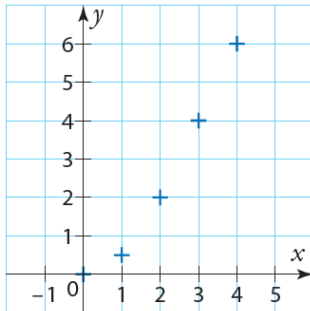
Une suite (u_n) a pour limite $+\infty$, quand n tend vers $+\infty$, si les termes u_n deviennent tous aussi proches de l que l'on veut en prenant n suffisamment grand.

On dit u_n diverge vers $+\infty$ et on note que $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = +\infty$.

Une suite (u_n) a pour limite $-\infty$, quand n tend vers $+\infty$, si les termes u_n deviennent tous aussi proches de l que l'on veut en prenant n suffisamment grand.

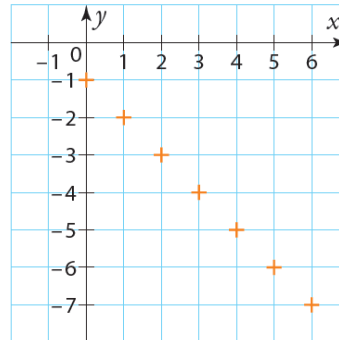
On dit u_n diverge vers $-\infty$ et on note que $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = -\infty$.

❖ Exemples :



On observe que les termes successifs de (u_n) sont de plus en plus grands, on peut conjecturer que :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = +\infty.$$



On observe que les termes successifs de (u_n) sont de plus en plus petits, on peut conjecturer que :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = -\infty.$$

❖ Exercices :

a) Conjecturer la limite de la suite (u_n) définie pour tout n de $\mathbb{N}$, par : $u_n = n^2 + 1$.

b) Conjecturer la limite de la suite (v_n) définie pour tout n de $\mathbb{N}$, par $\begin{cases} v_0 = 2 \\ v_{n+1} = (-1)^n v_n \end{cases}$

a) Calculons quelques termes de cette suite :

$$u_0 = 0^2 + 1 = 1,$$

$$u_1 = 1^2 + 1 = 2,$$

$$u_2 = 2^2 + 1 = 5,$$

$$u_{10} = 10^2 + 1 = 101,$$

$$u_{100} = 100^2 + 1 = 10001,$$

Plus n devient grand, plus les termes de la suite semblent devenir grand.

Donc, on peut conjecturer que la suite (u_n) diverge vers $+\infty$ et on note : $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = +\infty$

b) Calculons les premiers termes de cette suite :

$$v_0 = 2$$

$$v_1 = (-1) \times 2 = -2$$

$$v_2 = (-1)^2 \times (-2) = -2$$

$$v_3 = (-1)^3 \times (-2) = 2$$

$$v_4 = (-1)^4 \times 2 = 2$$

$$v_5 = (-1)^5 \times 2 = -2$$

Lorsque n devient grand, les termes de la suite ne semblent pas se rapprocher vers une valeur unique. On dit que la suite (u_n) diverge.