Mathématiques 1ère EDS	Chapitre 10 : Comportement d'une suite	Algèbre

I – Étude du sens de variation d'une suite :

a) Sens de variation d'une suite :

Définition :

- La suite (u_n) est **croissante** à partir du rang p si pour tout entier $n \geq p$ on a $\boldsymbol{u_{n+1} \geq u_n}$.
- La suite (u_n) est **décroissante** à partir du rang p si pour tout entier $n \geq p$ on a $\boldsymbol{u_{n+1} \leq u_n}$.
- La suite (u_n) est monotone à partir du rang p si elle est soit croissante soit décroissante à partir du rang p.
- La suite (u_n) est **constante** à partir du rang p si pour tout entier $n \geq p$ on a $\boldsymbol{u_{n+1} = u_n}$.

❖ **Remarques :**

- Comme pour les fonctions, si on remplace les inégalités larges par des inégalités strictes, on parle de suite strictement croissante, strictement décroissante, ou strictement monotone.
- Il existe des suites qui ne sont pas monotones, comme la suite (u_n) définie par $u_n = (-1)^n$

b) Etude du signe de la différence : $\boldsymbol{u_{n+1} - u_n}$.

Pour étudier le sens de variation d'une suite, on peut étudier le signe de la différence entre deux termes consécutifs quelconques :

Propriété :

- Si pour tout entier $n \geq p$ on a $\boldsymbol{u_{n+1} - u_n \geq 0}$ alors la suite (u_n) est **croissante** à partir du rang p.
- Si pour tout entier $n \geq p$ on a $\boldsymbol{u_{n+1} - u_n} \leq 0$ alors la suite (u_n) est **décroissante** à partir du rang p.

Démonstration :

$\forall\, n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} - u_n \geq 0$ équivaut à $u_{n+1} \geq u_n$, donc la suite (u_n) est croissante.

$\forall\, n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} - u_n \leq 0$ équivaut à $u_{n+1} \leq u_n$, donc la suite (u_n) est décroissante.

❖ **Exercice :**

Etudier le sens de variation des suites suivantes définie, pour tout $n \in \mathbb{N}$ par :

a) $u_{n+1} = u_n + n^2 + 1$ b) $v_n = n^2 + n$

c) Comparaison entre $\boldsymbol{\frac{u_{n+1}}{u_n}}$ et 1 :

Propriété : Soit (u_n) une suite dont **tous les termes sont strictement positifs**.

- Si pour tout entier $n \geq p$ on a $\boldsymbol{\frac{u_{n+1}}{u_n} \geq 1}$, alors $u_{n+1} \geq u_n$ alors la suite (u_n) est **croissante** à partir du rang p.
- Si pour tout entier $n \geq p$ on a $\boldsymbol{\frac{u_{n+1}}{u_n} \leq 1}$, alors $u_{n+1} \leq u_n$ alors la suite (u_n) est **décroissante** à partir du rang

❖ **Exercice :**

Etudier le sens de variation des suites suivantes définie, pour tout $n \in \mathbb{N}$ par :

a) $u_n = 5 \times 3^n$ b) $v_n = \frac{2^n}{5^{n+1}}$

d) Suites du type : $u_n = f(n)$.

Dans le cas où la suite est définie de manière **explicite** par une expression du type $u_n = f(n)$ avec f définie sur l'intervalle $[p; +\infty[$, on utilise la propriété suivante :

Propriété : f est une fonction définie sur l'intervalle $[p; +\infty[$, et pour $n \geq p$, $u_n = f(n)$.

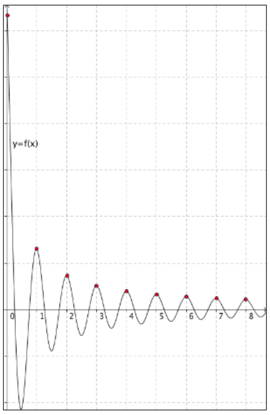
- Si la fonction f est croissante sur $[p; +\infty[$ alors la suite (u_n) est croissante à partir du rang p.
- Si la fonction f est décroissante sur $[p; +\infty[$ alors la suite (u_n) est décroissante à partir du rang p.

Démonstration :

Cas où f est croissante sur $[p; +\infty[$

Pour tout entier $n \geq p$ on a $n + 1 \geq n$ qui implique que $f(n + 1) \geq f(n)$ car f croissante sur $[p; +\infty[$ donc $u_{n+1} \geq u_n$ et on en déduit que la suite est croissante à partir de p.

On procède de manière analogue dans le cas où f est décroissante.



Remarque :

La réciproque de cette propriété est fausse : en effet la suite (u_n) peut-être croissante alors que f ne l'est pas :

❖ **Exemple :**

Etudier le sens de variation de la suite (u_n) définie, pour tout $n \in \mathbb{N}$ par $u_n = 2n^2 - 8n + 11$.

e) Sens de variation d'une suite arithmétique :

Propriété : Soit (u_n) une suite arithmétique de raison r

- Si $r > 0$ alors la suite (u_n) est croissante.
- Si $r < 0$ alors la suite (u_n) est décroissante.
- Si $r = 0$ alors la suite (u_n) est constante.

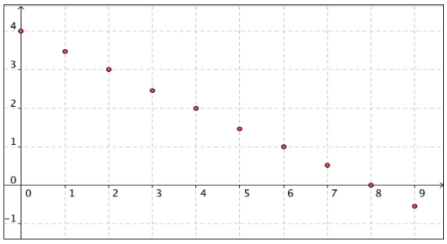
Démonstration : $\forall\, n \in \mathbb{N}, u_{n+1} - u_n = \mathrm{r}$

Si $r > 0$ alors $U_{n+1} - U_n > 0$ donc la suite (u_n) est strictement croissante.
Si $r < 0$ alors $U_{n+1} - U_n < 0$ donc la suite (u_n) est strictement décroissante.
Si $r = 0$ alors $U_{n+1} - U_n = 0$ donc la suite (u_n) est strictement constante.

❖ **Exemple :**

Etudier les variations des suites ci-dessous.

a) (u_n) est une suite arithmetique de raison 2 et de premier terme $v_0 = -3$.
b) (v_n) est définie par v_0 = 4 et, pour tout *n* ∈ ℕ, $v_n = 4 - 0{,}5n$.



f) Sens de variation d'une suite géométrique :

Propriété : Soit (u_n) une suite géométrique de raison *q* et de premier terme $u_0 \neq 0$

- Si $q > 1$:
  - ◻ Si $u_0 > 0$, alors la suite (u_n) est strictement croissante.
  - ◻ Si $u_0 < 0$, alors la suite (u_n) est strictement décroissante.
- Si $0 < q > 1$:
  - ◻ Si $u_0 > 0$, alors la suite (u_n) est strictement décroissante.
  - ◻ Si $u_0 < 0$, alors la suite (u_n) est strictement croissante.
- Si $q = 0 \; ou \; q = 1$, alors la suite est constante.
- Si $q < 0$, alors la suite n'est pas monotone.

Démonstration dans le cas où $u_0 > 0$:

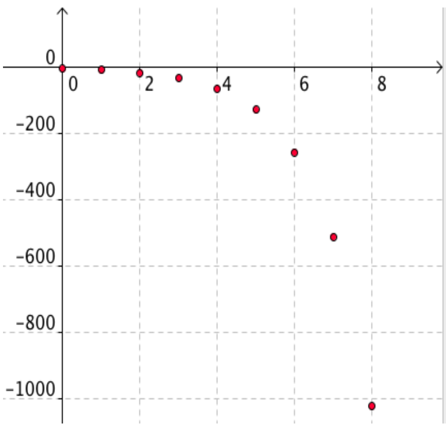
$\forall\, n \in \mathbb{N}, u_{n+1} - u_n = u_0 q^{n+1} - u_0 q^n = u_0 q^n (q - 1)$.

- Si $q > 1$ alors $u_{n+1} - u_n > 0$ et la suite (u_n) est croissante.
- Si $0 < q < 1$ alors $u_{n+1} - u_n < 0$ et la suite (u_n) est décroissante.

❖ **Exemple :**

Etudier les variations des suites ci-dessous.

a) (u_n) est une suite géométrique de raison 5 et de premier terme $u_0 = 3$.
b) (v_n) est définie par $v_0 = -4$ et, pour tout *n* ∈ ℕ, $v_n = -4 \times 2^n$.

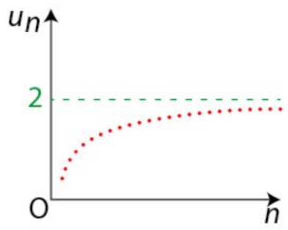


	A	B
1	n	u_n
2	0	-4
3	1	-8
4	2	-16
5	3	-32
6	4	-64
7	5	-128
8	6	-256
9	7	-512
10	8	-1024

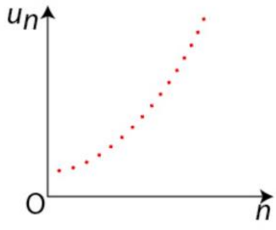
II – Notion de limite de suite:

a) Différentes situations:

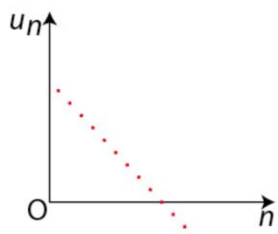
On se propose d'observer le comportement des termes u_n d'une suite lorsque n prend des valeurs de plus en plus grandes. Plusieurs situations peuvent se présenter.



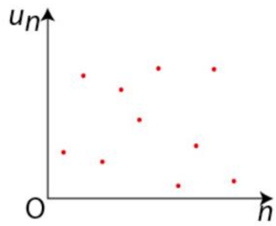
• Les termes u_n sont de plus en plus proches de 2.



• Les termes u_n sont de plus en plus grands.



• Les nombres $-u_n$ sont de plus en plus grands.



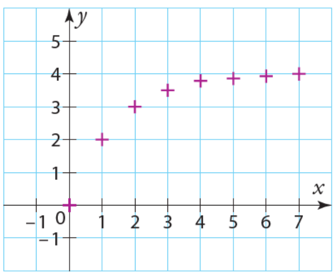
• Les termes u_n semblent se disperser.

b) Suite convergente : Suite ayant pour limite un nombre réel.

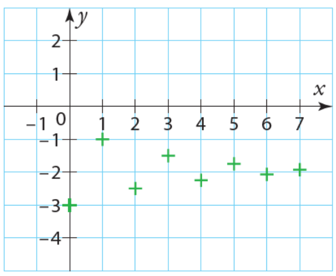
Définition :
Une suite (u_n) a pour limite un réel l quand n tend vers $+\infty$, si les termes u_n deviennent tous aussi proches de l que l'on veut en prenant n suffisamment grand.

On dit u_n converge vers l et on note que $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = l$

❖ **Exemples :**



① On observe que les termes successifs de (u_n) semblent se rapprocher de 4, donc on peut penser que $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = 4$.



② On observe que les termes successifs de (u_n) semblent se rapprocher de -2, donc on peut penser que $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = -2$.

❖ **Exercice :**

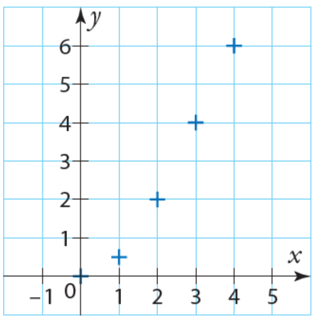
Conjecturer la limite de la suite (u_n) définie pour tout n de $\mathbb{N}^*$, par : $u_n = \frac{2n+1}{n}$

c) Suite divergente : Suite ayant pour limite +∞ ou -∞ .

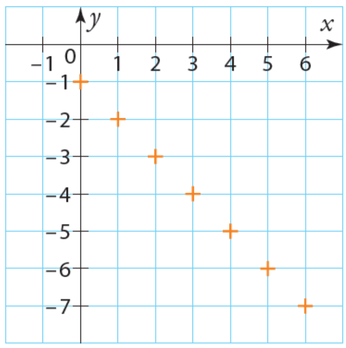
Définition :
Une suite (u_n) a pour limite $+\infty$, quand n tend vers $+\infty$, si les termes u_n deviennent tous aussi proches de l que l'on veut en prenant n suffisamment grand.
On dit u_n diverge vers $+\infty$ et on note que $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = +\infty$.

Une suite (u_n) a pour limite $-\infty$, quand n tend vers $+\infty$, si les termes u_n deviennent tous aussi proches de l que l'on veut en prenant n suffisamment grand.
On dit u_n diverge vers $+\infty$ et on note que $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = -\infty$.

❖ **Exemples :**



On observe que les termes successifs de (u_n) sont de plus en plus grands, on peut conjecturer que : $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = +\infty$.



On observe que les termes successifs de (u_n) sont de plus en plus petits, on peut conjecturer que : $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = -\infty$.

❖ **Exercices :**

a) Conjecturer la limite de la suite (u_n) définie pour tout *n* de ℕ , par : $u_n = n^2 + 1$.

b) Conjecturer la limite de la suite (v_n) définie pour tout *n* de ℕ , par $\begin{cases} v_0 = 2 \\ v_{n+1} = (-1)^n v_n \end{cases}$