

Mathématiques 1 ^{ère} EDS	Chapitre 12 : La fonction exponentielle	Algèbre
---------------------------------------	---	---------

I – La fonction exponentielle :

a) Existence et unicité de la fonction exponentielle :

Définition :

Il existe une unique fonction f dérivable sur $\mathbb{R}$ telle que $f' = f$ et $f(0) = 1$.

Cette fonction s'appelle **fonction exponentielle** et se note **exp**.

Ainsi la fonction exponentielle est définie et dérivable sur $\mathbb{R}$ avec $\exp(0) = 1$ et $(\exp x)' = \exp x$

❖ Démonstration :

On admet l'existence d'une telle fonction f . On va démontrer son unicité.

On va montrer que, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f(x) \times f(-x) = 1$ et $f(x) \neq 0$.

Soit $h(x) = f(x) \times f(-x)$ pour $x \in \mathbb{R}$.

Alors h est dérivable sur $\mathbb{R}$ et $h'(x) = f'(x) \times f(-x) + f(x) \times (-1) \times f'(-x) = f(x) \times f(-x) - f(x) \times f(-x) = 0$

h est donc une fonction constante sur $\mathbb{R}$. Or $h(0) = f(0) \times f(-0) = 1 \times 1 = 1$ donc $h(x) = 1$ pour tout $x \in \mathbb{R}$. Autrement dit $f(x) \times f(-x) = 1$.

On en déduit que pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f(x) \neq 0$.

2) Soit g une fonction qui vérifie les mêmes propriétés que f : $g' = g$ et $g(0) = 1$.

On définit une fonction k par $k(x) = \frac{g(x)}{f(x)}$, ce qui est possible pour $x \in \mathbb{R}$ d'après le point précédent.

Alors $k'(x) = \frac{g'(x)f(x) - g(x)f'(x)}{(f(x))^2} = \frac{g(x)f(x) - g(x)f(x)}{(f(x))^2} = 0$ donc k est constante sur $\mathbb{R}$. Or $k(0) = \frac{g(0)}{f(0)} = \frac{1}{1} = 1$ donc pour tout réel x , $k(x) = 1$.

On en déduit que pour tout réel x , $g(x) = f(x)$: la fonction f est donc unique.

b) Propriétés algébriques de la fonction exponentielle :

Propriété : exponentielle d'une somme

Pour tous réels a et b , **$\exp(a + b) = \exp(a) \times \exp(b)$**

❖ Démonstration :

Soit $b \in \mathbb{R}$. On définit une fonction f sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \frac{1}{\exp(b)} \times \exp(x + b)$

Alors f est dérivable sur $\mathbb{R}$ et $f'(x) = \frac{1}{\exp(b)} \times 1 \times \exp(x + b) = \frac{1}{\exp(b)} \times \exp(x + b) = f(x)$

De plus, $f(0) = \frac{1}{\exp(0)} \times \exp(0 + b) = \frac{\exp(b)}{\exp(b)} = 1$

On déduit des points précédents que f est la fonction exponentielle, et donc que, pour tout réel x :

$\frac{1}{\exp(b)} \times \exp(x + b) = \exp(x)$, soit $\exp(x + b) = \exp(x) \times \exp(b)$.

Propriétés : exponentielle, opposé, différence et puissance

On déduit de la propriété précédente que :

- Pour $a \in \mathbb{R}$ tout réel x , **$\exp(-x) = \frac{1}{\exp(x)}$**
- Pour tous nombres réels a et b , **$\exp(a - b) = \frac{\exp(a)}{\exp(b)}$**
- Pour tout réel a et tout nombre entier relatif n , **$(\exp(a))^n = \exp(na)$**

c) Nouvelle notation et nombre e :

Définition :

Le nombre e est l'image de 1 par la fonction exponentielle. On a donc $\exp(1)=e$.

Notation : Les propriétés algébriques précédentes sont analogues aux règles de calculs des puissances, on introduit donc une nouvelle notation : $\exp(x) = e^x$ lire « exponentielle ou e exposant x » ainsi on écrit : $e^0 = 1$ et $e^1 = e$

Remarque : on a avec la calculatrice

$$e^1 \quad 2.718281828 \quad e \approx 2,72$$

Propriétés : nouvelle écriture et propriétés algébriques.

On déduit de la propriété précédente que :

- Pour tous nombres réels x et y , $e^{x+y} = e^x \times e^y$
- Pour tout réel x , $e^{-x} = \frac{1}{e^x}$
- Pour tous nombres réels x et y , $e^{x-y} = \frac{e^x}{e^y}$
- $e^{0,5} = \sqrt{e}$
- Pour tout réel x et tout nombre entier relatif n , $(e^x)^n = e^{nx} = (e^n)^x$ En particulier : $(e^x)^2 = e^{2x}$

❖ Exercice :

a) Simplifier les expressions suivantes en l'écrivant avec une seule exponentielle :

$A = \frac{e \times e^2}{e^4} =$	$B = \frac{1}{(e^{-3})^2} + \frac{(e^4)^{-1}}{e^2 \times e^{-6}} =$
----------------------------------	---

b) x désigne un nombre réel, écrire chaque expression avec une seule exponentielle.

$C = e^{3x} \times e^{5-x} =$	$D = \frac{e^{2x-3}}{e^{x-1}} =$
-------------------------------	----------------------------------

II – Applications de la fonction exponentielle :

a) Courbe représentative de la fonction exponentielle :

Propriété :

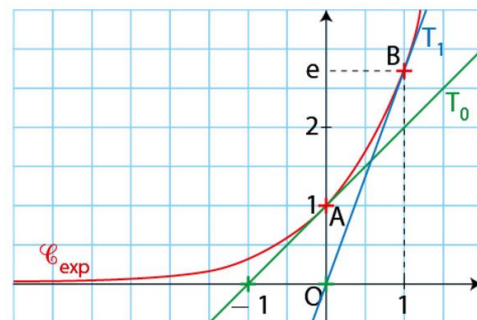
La fonction exponentielle est strictement croissante sur $\mathbb{R}$,

❖ Démonstration :

La fonction exponentielle est strictement positive sur $\mathbb{R}$, soit pour tout nombre réel x , $e^x > 0$, comme cette fonction est égale à sa dérivée, on en déduit que la fonction exponentielle est strictement croissante sur $\mathbb{R}$ car $(e^x)' = e^x$ et $e^x > 0$.

▪ Voici le tableau de variation de la fonction exponentielle :

x	$-\infty$	0	1	$+\infty$
$\exp'(x)$		+		
$\exp(x)$		1	e	



Tangente T_0 au point d'abscisse 0 :

On note f la fonction exponentielle, $f(0) = e^0 = 1$ et $f'(0) = e^0 = 1$.

Une équation de T est : $y = f'(0)(x - 0) + f(0)$, soit $y = x + 1$.

Tangente T_1 au point d'abscisse 1 :

On note f la fonction exponentielle, $f(1) = e^1 = e$ et $f'(1) = 1$.

Une équation de T est : $y = f'(1)(x - 1) + f(1)$, soit $y = e(x - 1) + e = ex$.

La courbe représentative de la fonction exponentielle est toujours au-dessus de l'axe des abscisses.

❖ Exercice :

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = (x + 1)e^x$.

- Calculer la dérivée de la fonction f .
- Dresser le tableau de variations de la fonction f .
- Déterminer une équation de la tangente à la courbe au point d'abscisse 0.
- Tracer la courbe représentative de la fonction f en s'aidant de la calculatrice.

b) Exponentielle d'une fonction affine :

Propriété :

a et b désignent deux nombres réels

Si f est une fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = e^{ax+b}$, alors f est dérivable sur $\mathbb{R}$ et $f'(x) = ae^{ax+b}$.

Démonstration :

On rappelle que la dérivée d'une fonction composée $x \mapsto f(ax+b)$ est $x \mapsto af'(ax+b)$.

En considérant $f(x) = e^x$, on a : $(e^{ax+b})' = ae^{ax+b}$.

❖ Exemples

- La fonction $h: x \mapsto e^{2x+5}$ est dérivable sur $\mathbb{R}$ et pour tout nombre réel x , $h'(x) =$
- La fonction $f: x \mapsto e^{-x}$ est dérivable sur $\mathbb{R}$ et pour tout nombre réel x , $f'(x) =$
- La fonction $j: x \mapsto e^{-0,5x-2}$ est dérivable sur $\mathbb{R}$ et pour tout nombre réel x , $j'(x) =$

c) Fonctions de la forme $t \mapsto e^{kt}$:

Propriété :

La fonction $t \mapsto e^{kt}$, avec $k \in \mathbb{R}^*$, est dérivable sur $\mathbb{R}$. Sa dérivée est la fonction $t \mapsto ke^{kt}$.

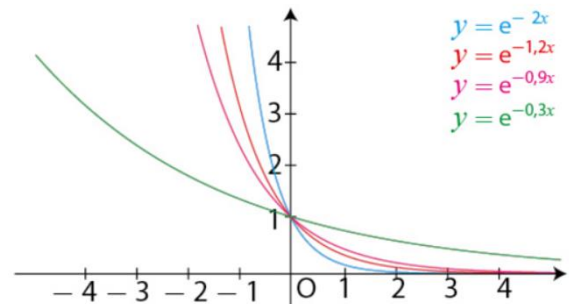
Exemple :

Soit $f(t) = e^{-4t}$ alors $f'(t) = -4e^{-4t}$.

k est un nombre réel strictement positif donné.

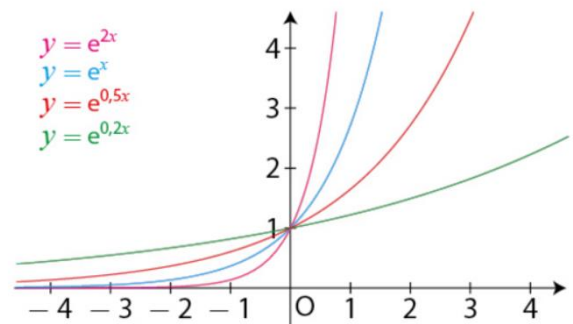
- La fonction $f_k: t \mapsto e^{-kt}$ est définie et dérivable sur $\mathbb{R}$. Pour tout nombre réel t , $f'_k(t) = -ke^{-kt}$, donc $f'_k(t) < 0$. La fonction f_k est donc strictement décroissante sur $\mathbb{R}$.

t	$-\infty$	0	$+\infty$
$f'_k(t)$		-	
$f_k(t)$		1	



- La fonction $g_k: t \mapsto e^{kt}$ est définie et dérivable sur $\mathbb{R}$. Pour tout nombre réel t , $g'_k(t) = ke^{kt}$, donc $g'_k(t) > 0$. La fonction g_k est donc strictement croissante sur $\mathbb{R}$.

t	$-\infty$	0	$+\infty$
$g'_k(t)$		+	
$g_k(t)$		1	



❖ Exercice d'application

Suite à une infection, le nombre de bactéries contenues dans un organisme en fonction du temps (en heures) peut être modélisé par la fonction f définie sur $[0 ; 10]$ et telle que $f'(t) = 0,14f(t)$.

- 1) Montrer que la fonction f définie sur $[0 ; 10]$ par $f(t) = Ae^{0,14t}$ convient.
- 2) On suppose que $f(0) = 50000$. Déterminer A .
- 3) Déterminer les variations de f sur $[0 ; 10]$.
- 4) a) À l'aide de la calculatrice, donner un arrondi au millier près du nombre de bactéries après 3h puis 5h30.
b) À l'aide de la calculatrice, déterminer au bout de combien de temps le nombre de bactéries a-t-il doublé. Arrondir à l'heure près.

d) Exponentielle et suites géométriques :

Propriété :

Pour tout réel a , la suite de terme général e^{na} est géométrique.

Démonstration :

$\forall n \in \mathbb{N}$, on pose $u_n = e^{na}$.

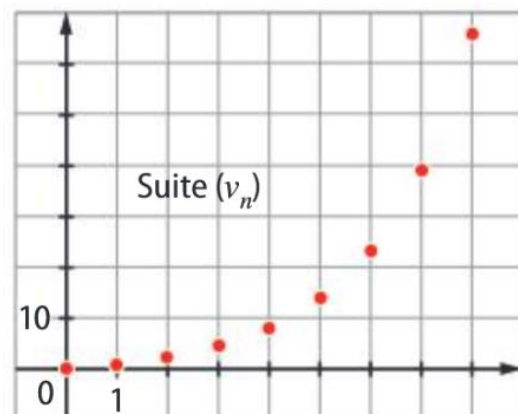
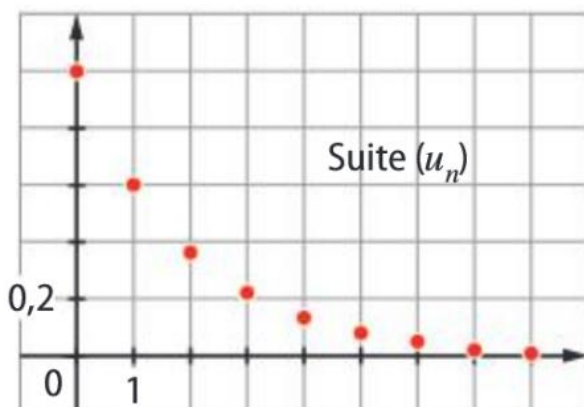
On a alors $u_{n+1} = e^{(n+1)a} = e^{na+a} = e^{na}e^a = e^a \times u_n$ pour tout n .

La suite (u_n) est donc géométrique de raison e^a et de premier terme $e^0 = 1$.

❖ Exemples

La suite (u_n) définie par $u_n = e^{-0,5n}$ est géométrique de raison $e^{-0,5}$. On dit que la décroissance de la suite (u_n) est exponentielle.

La suite (v_n) définie par $v_n = e^{0,5n}$ est géométrique de raison $e^{0,5}$. On dit que la croissance de la suite (v_n) est exponentielle.



❖ **Exercice d'application :**

1) Dans chaque cas, déterminer la raison et le premier terme de la suite géométrique dont le terme général est :

a) $u_n = e^{4n}$ b) $u_n = 2e^{-3n}$ c) $u_n = -e^{\frac{n}{3}}$ d) $u_n = e^{2n-1}$

2) Déterminer le terme général d'une suite géométrique de raison $\frac{1}{e}$ et de premier terme 3.

3) (u_n) est la suite définie pour tout nombre n de $\mathbb{N}$ définie par $u_n = e^{5n}$.

a) Démontrer que la suite (u_n) est géométrique. Préciser sa raison et son premier terme u_0 .

b) Calculer la valeur exacte de la somme $S = u_0 + u_1 + u_3$.