Mathématiques 1ère EDS	**Chapitre 12 : La fonction exponentielle**	**Algèbre**

I – La fonction exponentielle :

a) Existence et unicité de la fonction exponentielle :

Définition :
Il existe une unique fonction f dérivable sur $\mathbb{R}$ telle que $f' = f$ et $f(0) = 1$.

Cette fonction s'appelle **fonction exponentielle** et se note **exp**.

Ainsi la fonction exponentielle est définie et dérivable sur $\mathbb{R}$ avec $\exp(0) = 1$ et $(\exp x)' = \exp x$

❖ Démonstration :

On admet l'existence d'une telle fonction f. On va démontrer son unicité.
On va montrer que, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f(x) \times f(-x) = 1$ et $f(x) \neq 0$.
Soit $h(x) = f(x) \times (-x)$ pour $x \in \mathbb{R}$.
Alors h est dérivable sur $\mathbb{R}$ et $h'(x) = f'(x) \times f(-x) + f(x) \times (-1) \times f'(-x) = f(x) \times f(-x) - f(x) \times f(-x) = 0$
h est donc une fonction constante sur $\mathbb{R}$. Or $h(0) = f(0) \times f(-0) = 1 \times 1 = 1$ donc $h(x) = 1$ pour tout $x \in \mathbb{R}$. Autrement dit $f(x) \times f(-x) = 1$.
On en déduit que pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f(x) \neq 0$.
2) Soit g une fonction qui vérifie les mêmes propriétés que f : $g' = g$ et $g(0) = 1$.
On définit une fonction k par $k(x) = \frac{g(x)}{f(x)}$, ce qui est possible pour $x \in \mathbb{R}$ d'après le point précédent.
Alors $k'(x) = \frac{g'(x)f(x) - g(x)f'(x)}{(f(x))^2} = \frac{g(x)f(x) - g(x)f(x)}{(f(x))^2} = 0$ donc k est constante sur $\mathbb{R}$. Or $k(0) = \frac{g(0)}{f(0)} = \frac{1}{1} = 1$ donc pour tout réel x, $k(x) = 1$.
On en déduit que pour tout réel x, $g(x) = f(x)$: la fonction f est donc unique.

b) Propriétés algébriques de la fonction exponentielle :

Propriété : exponentielle d'une somme

Pour tous réels a et b, $\boldsymbol{exp(a + b) = exp(a) \times exp(b)}$

❖ Démonstration :

Soit $b \in \mathbb{R}$. On définit une fonction f sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \frac{1}{\exp(b)} \times \exp(x + b)$
Alors f est dérivable sur $\mathbb{R}$ et $f'(x) = \frac{1}{\exp(b)} \times 1 \times \exp(x + b) = \frac{1}{\exp(b)} \times \exp(x + b) = f(x)$
De plus, $f(0) = \frac{1}{\exp(0)} \times \exp(0 + b) = \frac{\exp(b)}{\exp(b)} = 1$
On déduit des points précédents que f est la fonction exponentielle, et donc que, pour tout réel x :
$\frac{1}{\exp(b)} \times \exp(x + b) = exp(x)$, *soit* $exp(x + b) = exp(x) \times exp(b)$.

Propriétés : exponentielle, opposé, différence et puissance
On déduit de la propriété précédente que :

- Pour $a \in \mathbb{R}$ tout réel x, $\boldsymbol{\exp(-x) = \frac{1}{exp(x)}}$
- Pour tous nombres réels a et b, $\boldsymbol{\exp(a - b) = \frac{exp(a)}{exp(b)}}$
- Pour tout réel a et tout nombre entier relatif n, $\boldsymbol{(exp(a))^n = exp(na)}$

c) Nouvelle notation et nombre e :

Définition :
Le nombre e est l'image de 1 par la fonction exponenetielle. On a donc exp(1)=e.

Notation : Les propriétés algébriques précédentes sont analogues aux règles de calculs des puissances, on introduit donc une nouvelle notation : $exp(x) = e^x$ lire « exponentielle ou e exposant x »
ainsi on écrit : $\boldsymbol{e^0 = 1}$ **et** $\boldsymbol{e^1 = e}$

Remarque : on a avec la calculatrice

```
e^1
        2.718281828
```

$e \approx 2{,}72$

Propriétés : nouvelle écriture et propriétés algébriques.
On déduit de la propriété précédente que :

- Pour tous nombres réels x et y, $\boldsymbol{e^{x+y} = e^x \times e^y}$
- Pour tout réel x, $\boldsymbol{e^{-x} = \frac{1}{e^x}}$
- Pour tous nombres réels x et y, $\boldsymbol{e^{x-y} = \frac{e^x}{e^y}}$
- $\boldsymbol{e^{0,5} = \sqrt{e}}$
- Pour tout réel x et tout nombre entier relatif n, $\boldsymbol{(e^x)^n = e^{nx} = (e^n)^x}$ En particulier : $\boldsymbol{(e^x)^2 = e^{2x}}$

❖ **Exercice** :

a) Simplifier les expressions suivantes en l'écrivant avec une seule exponentielle :

$A = \frac{e \times e^2}{e^4} = \frac{e^1 \times e^2}{e^4} = \frac{e^3}{e^4} = e^{3-4} = e^{-1} = \frac{1}{e}$	$B = \frac{1}{(e^{-3})^2} + \frac{(e^4)^{-1}}{e^2 \times e^{-6}} = \frac{1}{e^{-3\times 2}} + \frac{e^{4\times(-1)}}{e^{2-6}} = \frac{1}{e^{-6}} + \frac{e^{-4}}{e^{-4}} = e^6 + 1$

b) x désigne un nombre réel, écrire chaque expression avec une seule exponentielle.

$C = e^{3x} \times e^{5-x} = e^{3x+5-x} = e^{2x+5}$	$D = \frac{e^{2x-3}}{e^{x-1}} = e^{2x-3-(x-1)} = e^{2x-3-x+1} = e^{x-2}$

II – Applications de la fonction exponentielle :

a) Courbe représentative de la fonction exponentielle :

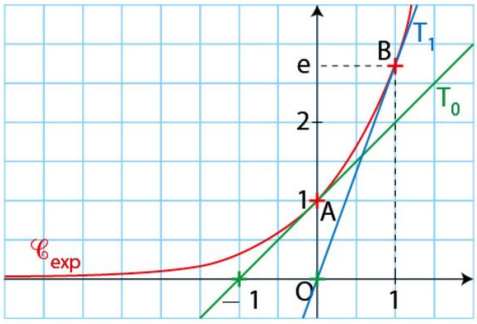
Propriété :
La fonction exponentielle est strictement croissante sur $\mathbb{R}$,

❖ **Démonstration :**

La fonction exponentielle est strictement positive sur $\mathbb{R}$, soit pour tout nombre réel x, $e^x > 0$, comme cette fonction est égale à sa dérivée, on en déduit que la fonction exponentielle est strictement croissante sur $\mathbb{R}$ car $(e^x)' = e^x$ et $e^x > 0$.

- Voici le tableau de variation de la fonction exponentielle :

x	$-\infty$		0		1		$+\infty$
$\exp'(x)$			$+$				
$\exp(x)$		↗	1	↗	e	↗	



<u>Tangente T_0 au point d'abscisse 0 :</u>
On note f la fonction exponentielle, $f(0) = e^0 = 1$ et $f'(0) = e^0 = 1$.
Une équation de T est : $y = f'(0)(x - 0) + f(0)$, soit $y = x + 1$.

<u>Tangente T_1 au point d'abscisse 1 :</u>
On note f la fonction exponentielle, $f(1) = e^1 = e$ et $f'(1) = 1$.
Une équation de T est : $y = f'(1)(x - 1) + f(1)$, soit $y = e(x - 1) + e = ex$.

La courbe représentative de la fonction exponentielle est toujours au-dessus de l'axe des abscisses.

❖ **<u>Exercice</u>** :

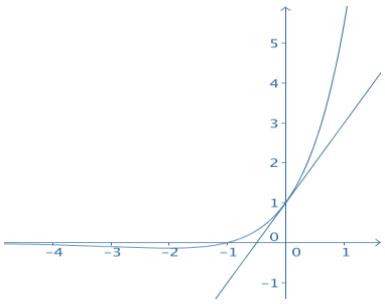
Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = (x + 1)e^x$.
a) Calculer la dérivée de la fonction f.
b) Dresser le tableau de variations de la fonction f.
c) Déterminer une équation de la tangente à la courbe au point d'abscisse 0.
d) Tracer la courbe représentative de la fonction f en s'aidant de la calculatrice.

a) $f'(x) = e^x + (x + 1)e^x = (x + 2)e^x$
b) Comme $e^x > 0$, $f'(x)$ est du signe de $x + 2$.
f est donc décroissante sur l'intervalle $]-\infty\ ;\ -2]$ et croissante sur l'intervalle $[-2\ ;\ +\infty[$.
On dresse le tableau de variations :

x	$-\infty$		-2		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	
$f(x)$		↘	$-e^{-2}$	↗	

c) $f(0) = 1$ et $f'(0) = 2$
Une équation de la tangente à la courbe en 0 est donc : $y = f'(0)(x - 0) + f(0)$, soit : $y = 2x + 1$

d)



b) Exponentielle d'une fonction affine :

Propriété :
a et b désignent deux nombres réels

Si f est une fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \boldsymbol{e^{ax+b}}$, alors f est dérivable sur $\mathbb{R}$ et $\boldsymbol{f'(x) = ae^{ax+b}}$.

Démonstration :
On rappelle que la dérivée d'une fonction composée $x \longmapsto f(ax+b)$ est $x \longmapsto af'(ax+b)$.
En considérant $f(x) = e^x$, on a : $\left(e^{ax+b}\right)' = ae^{ax+b}$.

❖ **Exemples**

- La fonction $h: x \longmapsto e^{2x+5}$ est dérivable sur $\mathbb{R}$ et pour tout nombre réel x, $h'(x) = 2e^{2x+5}$
- La fonction $f: x \longmapsto e^{-x}$ est dérivable sur $\mathbb{R}$ et pour tout nombre réel x, $f'(x) = -e^{-x}$
- La fonction $j: x \longmapsto e^{-0,5x-2}$ est dérivable sur $\mathbb{R}$ et pour tout nombre réel x, $j'(x) = -0,5e^{-0,5x-2}$

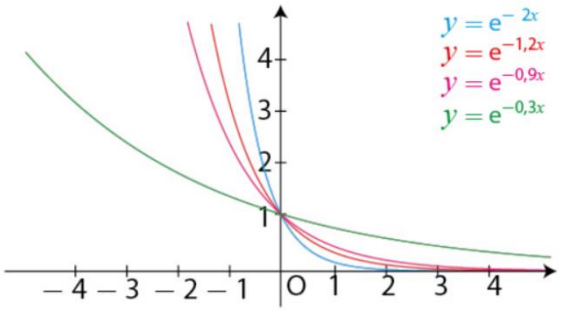
c) Fonctions de la forme $t \longmapsto e^{kt}$:

Propriété :
La fonction $t \longmapsto e^{kt}$, avec $k \in \mathbb{R}*$, est dérivable sur $\mathbb{R}$. Sa dérivée est la fonction $t \longmapsto ke^{kt}$.

Exemple :
Soit $f(t) = e^{-4t}$ alors $f'(t) = -4e^{-4t}$.

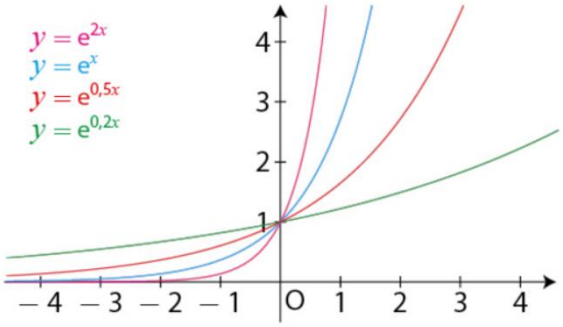
k est un nombre réel strictement positif donné.
• La fonction $f_k : t \mapsto e^{-kt}$ est définie et dérivable sur $\mathbb{R}$.
Pour tout nombre réel t, $f_k'(t) = -ke^{-kt}$, donc $f_k'(t) < 0$.
La fonction f_k est donc strictement décroissante sur $\mathbb{R}$.

t	$-\infty$	0	$+\infty$
$f_k'(t)$		$-$	
$f_k(t)$	↘	1	↘



• La fonction $g_k : t \mapsto e^{kt}$ est définie et dérivable sur $\mathbb{R}$.
Pour tout nombre réel t, $g_k'(t) = ke^{kt}$, donc $g_k'(t) > 0$.
La fonction g_k est donc strictement croissante sur $\mathbb{R}$.

t	$-\infty$	0	$+\infty$
$g_k'(t)$		$+$	
$g_k(t)$	↗	1	↗



❖ Exercice d'application

Suite à une infection, le nombre de bactéries contenues dans un organisme en fonction du temps (en heures) peut être modélisé par la fonction *f* définie sur [0 ; 10] et telle que $f'(t) = 0{,}14f(t)$.

1) Montrer que la fonction *f* définie sur [0 ; 10] par $f(t) = Ae^{0{,}14t}$ convient.
2) On suppose que $f(0) = 50000$. Déterminer *A*.
3) Déterminer les variations de *f* sur [0 ; 10].
4) a) À l'aide de la calculatrice, donner un arrondi au millier près du nombre de bactéries après 3h puis 5h30.
b) À l'aide de la calculatrice, déterminer au bout de combien de temps le nombre de bactéries a-t-il doublé. Arrondir à l'heure près.

1) $f'(t) = A \times 0{,}14e^{0{,}14t} = 0{,}14 \times Ae^{0{,}14t} = 0{,}14f(t)$.
La fonction *f* définie sur [0 ; 10] par $f(t) = Ae^{0{,}14t}$ vérifient bien l'égalité $f'(t) = 0{,}14f(t)$ donc elle convient.

2) $f(0) = Ae^{0{,}14\times 0} = Ae^0 = A$.
Donc, si $f(0) = 50000$, on a : $A = 50000$.
Une expression de la fonction *f* est donc : $f(t) = 50000e^{0{,}14t}$.

3) Comme $k = 0{,}14 > 0$, on en déduit que la fonction $x \longmapsto e^{0{,}14t}$ est strictement croissante sur [0 ; 10]. Il en est de même pour la fonction *f*.

4) a) $f(3) = 50000e^{0{,}14\times 3} = 50000e^{0{,}42} \approx 76000$
$f(5{,}5) = 50000e^{0{,}14\times 5{,}5} = 50000e^{0{,}77} \approx 108000$

Après 3h, l'organisme contient environ 76 000 bactéries.
Après 5h30, l'organisme contient environ 108 000 bactéries.

b) Le nombre de bactéries a doublé à partir de 100 000 bactéries, soit au bout d'environ 5h.

X	Y1
4.89	99149
4.9	99288
4.91	99427
4.92	99566
4.93	99706
4.94	99845
4.95	99985
4.96	100125
4.97	100266
4.98	100406
4.99	100547

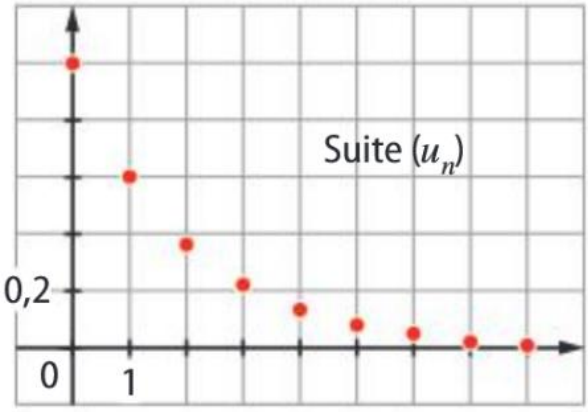
d) Exponentielle et suites géométriques :

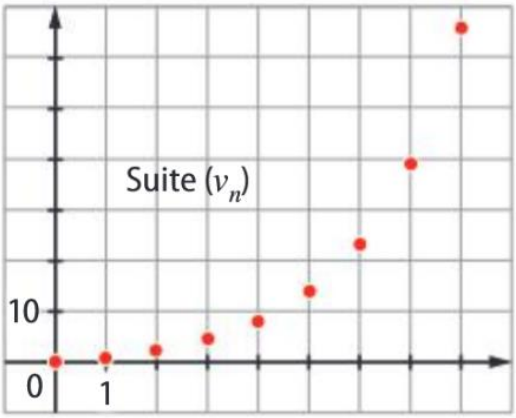
Propriété :
Pour tout réel a, la suite de terme général e^{na} est géométrique.

Démonstration :
$\forall\, n \in \mathbb{N}$, on pose $u_n = e^{na}$.
On a alors $u_{n+1} = e^{(n+1)a} = e^{na+a} = e^{na}e^a = e^a \times u_n$ pour tout n.
La suite (u_n) est donc géométrique de raison e^a et de premier terme $e^0 = 1$.

❖ Exemples

La suite (u_n) définie par $u_n = e^{-0{,}5n}$ est géométrique de raison $e^{-0{,}5}$. On dit que la décroissance de la suite (u_n) est exponentielle.	La suite (v_n) définie par $v_n = e^{0{,}5n}$ est géométrique de raison $e^{0{,}5}$. On dit que la croissance de la suite (v_n) est exponentielle.





❖ **Exercice d'application :**

1) Dans chaque cas, déterminer la raison et le premier terme de la suite géométrique dont le terme général est :
a) $u_n = e^{4n}$ b) $u_n = 2e^{-3n}$ c) $u_n = -e^{\frac{n}{3}}$ d) $u_n = e^{2n-1}$

2) Déterminer le terme général d'une suite géométrique de raison $\frac{1}{e}$ et de premier terme 3.

1) a) $u_n = e^{4n} = 1(e^4)^n$
(u_n) est une suite géométrique de raison e^4 et de premier terme 1.

b) $u_n = 2e^{-3n} = 2(e^{-3})^n$
(u_n) est une suite géométrique de raison e^{-3} et de premier terme 2.

c) $u_n = -e^{\frac{n}{3}} = (-1)\left(e^{\frac{1}{3}}\right)^n$
(u_n) est une suite géométrique de raison $e^{\frac{1}{3}}$ et de premier terme -1.

d) $u_n = e^{2n-1} = e^{2n}e^{-1} = e^{-1}(e^2)^n = \frac{1}{e}(e^2)^n$
(u_n) est une suite géométrique de raison e^2 et de premier terme $\frac{1}{e}$.

2) (u_n) est suite géométrique de raison $\frac{1}{e}$ et de premier terme 3, donc :
$u_n = 3\left(\frac{1}{e}\right)^n = 3(e^{-1})^n = 3e^{-n}$.

3) (u_n) est la suite définie pour tout nombre n de $\mathbb{N}$ définie par $u_n = e^{5n}$.
a) Démontrer que la suite (u_n) est géométrique. Préciser sa raison et son premier terme u_0.
b) Calculer la valeur exacte de la somme $S = u_0 + u_1 + u_3$.

a) Pour tout nombre n de $\mathbb{N}$:
$u_{n+1} = e^{5(n+1)} = e^{5n+5} = e^{5n} \times e^5 = e^5 \times u_n$
La suite (u_n) est donc géométrique de raison $q = e^5$.
Son premier terme est $u_0 = e^{5\times 0} = e^0 = 1$.

b) $S = u_0 + u_1 + u_2 + u_3 = 1 + e^5 + (e^5)^2 + (e^5)^3 = \dfrac{1-(e^5)^{3+1}}{1-e^5}$.
Donc $S = \dfrac{1-e^{20}}{1-e^5}$.