Exercices 11 à 13 p 146

11 x désigne un nombre réel.

Écrire chaque expression avec une seule exponentielle.

a) $A = e^{10x-8} \times e^{1-2x}$ **b)** $B = \dfrac{e^{x+1}}{e^{4x+3}}$

c) $C = (e^{5x+2})^2$

12 x désigne un nombre réel.

Écrire chaque expression avec une seule exponentielle.

a) $A = e^{-2,5x} \times e \times e^{0,5x-1}$ **b)** $B = \dfrac{(e^x)^2}{e^{-2} \times e^{9x}}$

13 a désigne un nombre réel.

Simplifier l'expression :

$$A = e^{-2a}(e^{4a} - 1) - (e^{-a} + e^{a})^2$$

Exercices 21 à 23 p 148

21 Simplifier mentalement les nombres en les écrivant avec une seule exponentielle.

a) $e^3 \times e^{-1}$ **b)** $\dfrac{(e^4)^3}{e^2}$

22 $A = \dfrac{e^{4x+6}}{e^{3-x}}$ où x est un nombre réel.

Laquelle de ces affirmations est exacte ?

(1) $A = e^{3x+9}$ **(2)** $A = e^{5x+3}$ **(3)** $A = e^{4x+2}$

23 $B = (e^{5x+1})^2$ où x est un nombre réel.

Florent affirme : « B est égal à e^{10x+1}. »

Que peut-on en penser ?

ex 28 ; 29 ; 31 ; 34 p 148

28 x désigne un nombre réel.

Simplifier chaque expression.

a) $A = e^{1-x} \times e^{3x-2}$ **b)** $B = e^{2x} \times e^{3-5x} \times e$

c) $C = (e^{x})^{2} \times e^{7+4x}$ **d)** $D = (e^{2x})^{3} \times e^{-3}$

29 t désigne un nombre réel.

Simplifier chaque expression.

a) $A = (e^{t+1})^{3}$ **b)** $B = (e^{-2-3t})^{10}$

b) $C = (e^{0,6+1,4t})^{2}$ **d)** $D = (e^{t^2+t-1})^{2}$

exercices 31 et 34 p 148

31 x désigne un nombre réel.

Simplifier chaque expression.

a) $A = \dfrac{e^{x} \times e^{3x}}{e^{-x} \times e^{4x}}$ **b)** $B = \dfrac{(e^{-x})^{3}}{e^{x+4}}$

c) $C = (e^{0,5x})^{2} \times \dfrac{1}{e^{x}}$ **d)** $D = \dfrac{e^{3x} \times e^{6}}{e \times e^{4x}} \times e^{-5}$

34 x désigne un nombre réel.
Écrire avec un seul quotient et simplifier chaque expression.

a) $1-\dfrac{(e^x-1)^2}{e^{2x}}$ **b)** $\dfrac{1}{e^x}+\dfrac{3-e^x}{e^{2x}}$

exercices 3 à 6 p 145

3 Déterminer la fonction dérivée de la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x)=(5+x)e^x$$

4 Déterminer la fonction dérivée de chaque fonction définie sur $\mathbb{R}$ par :

a) $f(x)=(2x-5)e^x$

b) $g(t)=te^t$

5 Déterminer la fonction dérivée de chaque fonction définie sur $\mathbb{R}$ par :

a) $f(t)=4e^t-1$

b) $g(x)=(-4x-5)e^x+10$

6 Déterminer la fonction dérivée de chaque fonction définie sur $\mathbb{R}$ par :

a) $f(x) = x^2 e^x$

b) $g(x) = (x^2 + 5x - 3)e^x$

Exercices 18 ,19 p 147

18 f est la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x) = (5x + 10)e^x$$

a) Déterminer la fonction dérivée f' de f.

b) Dresser le tableau de variations de f sur $\mathbb{R}$.

19 g est la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$g(x) = -xe^x$$

a) Déterminer la fonction dérivée g' de g.

b) Dresser le tableau de variations de g sur $\mathbb{R}$.

exercices 37 à 42 p 149

37 f est la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x) = e^x + 1$$

Déterminer mentalement la fonction dérivée de f.

38 f est la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x) = -0{,}1e^x + 4$$

Laquelle de ces affirmations est exacte ?

(1) Pour tout nombre réel x, $f'(x) = -0{,}1e^x + 4$.

(2) Pour tout nombre réel x, $f'(x) = -0{,}1e^x$.

(3) Pour tout nombre réel x, $f'(x) = e^x$.

39 Déterminer la fonction dérivée de chacune des fonctions définies sur $\mathbb{R}$ par :

a) $f(x) = e^x + 4$

b) $g(x) = 2{,}7e^x + 8$

c) $h(x) = 5e^x + x$

d) $i(x) = 3x - 3e^x$

e) $j(x) = 5x^3 - 9e^x$

f) $k(x) = e - e^x$

40 f est la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(t) = (1-t)e^t$$

Justifier que la fonction dérivée de f est définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f'(t) = -te^t$$

exercices 41 et 42 p 149

41 Déterminer la fonction dérivée de chacune des fonctions définies sur $\mathbb{R}$ par :

a) $f(x) = (2x - 7)e^x$

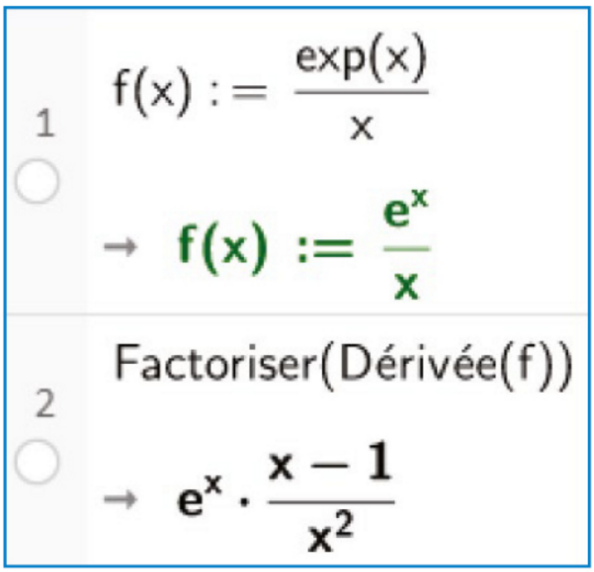
b) $g(x) = xe^x$

c) $h(x) = (3x^2 - 2)e^x$

42 f est la fonction définie sur l'intervalle $[0{,}5\ ; +\infty[$ par :

$$f(x) = \frac{e^x}{x}$$

Justifier le résultat obtenu ci-contre à la ligne 2 avec un logiciel de calcul formel.



Exercice 55 p 150

55 f est la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x) = (x^2 - 4)e^x$$

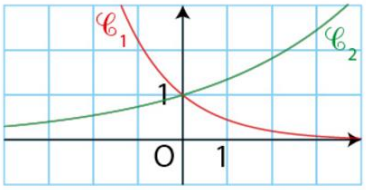
Dresser le tableau de variations de f.

Etudier l'exercice corrigé 17 p 147 : Identifier une fonction

Dans le repère ci-contre, on a représenté graphiquement les fonctions :

$$f : t \mapsto e^{-0,8t} \text{ et } g : t \mapsto e^{0,3t}.$$

Déterminer les variations de chacune des fonctions et identifier les deux courbes sur le graphique.



Solution

- Pour tout nombre réel t, $f(t) = e^{-0,8t}$ donc $f'(t) = -0,8e^{-0,8t}$.

Or pour tout réel t, $e^{-0,8t} > 0$, ainsi $f'(t) < 0$ et f est décroissante sur $\mathbb{R}$.

- Pour tout nombre réel t, $g(t) = e^{0,3t}$ donc $g'(t) = 0,3e^{0,3t}$.

Or pour tout réel t, $e^{0,3t} > 0$, ainsi $g'(t) > 0$ et g est croissante sur $\mathbb{R}$.

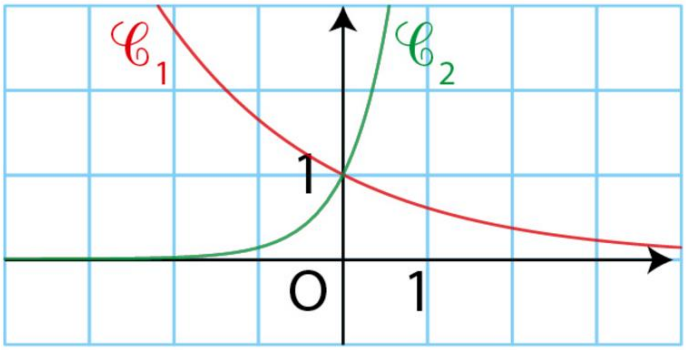
- La courbe $\mathscr{C}_1$ est donc celle de la fonction f et $\mathscr{C}_2$ celle de la fonction g.

On utilise le fait que si $f(x) = e^{ax+b}$, alors $f'(x) = ae^{ax+b}$.

20 p 147

20 Dans le repère ci-dessous, on a représenté graphiquement les fonctions :

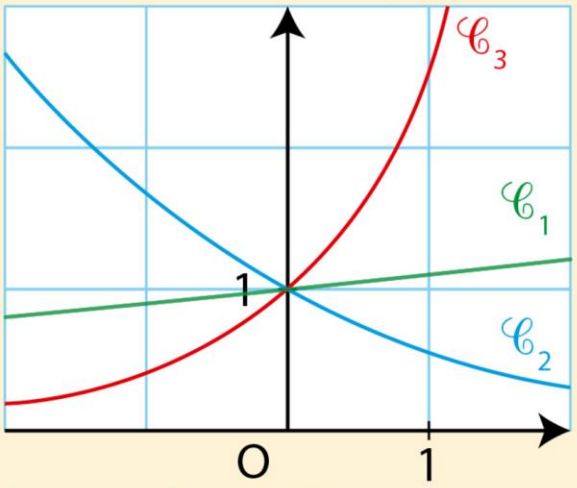
$$f : t \mapsto e^{2t} \text{ et } g : t \mapsto e^{-0,5t}.$$



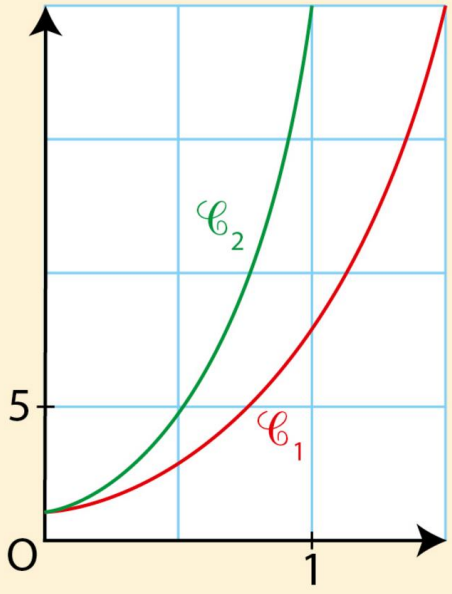
Déterminer les variations de chacune des fonctions et identifier les deux courbes sur le graphique.

exercices 58 à 60 p 150

58 Voici, dans un repère, les courbes représentatives des trois fonctions définies sur l'intervalle $[-2\ ;\ 2]$ par :
$f(x) = \mathrm{e}^{x}$,
$g(x) = \mathrm{e}^{-0,5x}$,
$h(x) = \mathrm{e}^{0,1x}$.
Associer chacune des fonctions à sa courbe représentative.



59 Voici, dans un repère, les courbes représentatives des deux fonctions définies sur l'intervalle $[0\ ;\ 1{,}5]$ par :
$f(t) = \mathrm{e}^{2t}$,
$g(t) = \mathrm{e}^{3t}$.
Associer chacune des fonctions à sa courbe représentative.



60 f est la fonction définie sur l'intervalle $[-3\ ;\ 3]$ par :

$$f(x) = \mathrm{e}^{0,82x}$$

a) Quel est le sens de variation de la fonction f ?

b) Recopier et compléter le tableau de valeurs ci-dessous.
Arrondir au centième si besoin.

x	-3	-2	-1	0	1	2	3
$f(x)$							

c) Tracer, dans un repère orthonormé, la courbe représentative de la fonction f (*unité* : 1 cm).

exercices 7 et 8 p 145

7 Déterminer la fonction dérivée de chaque fonction définie sur $\mathbb{R}$ par :

a) $f(x) = e^{7x}$

b) $g(x) = 1{,}5e^{0{,}4x}$

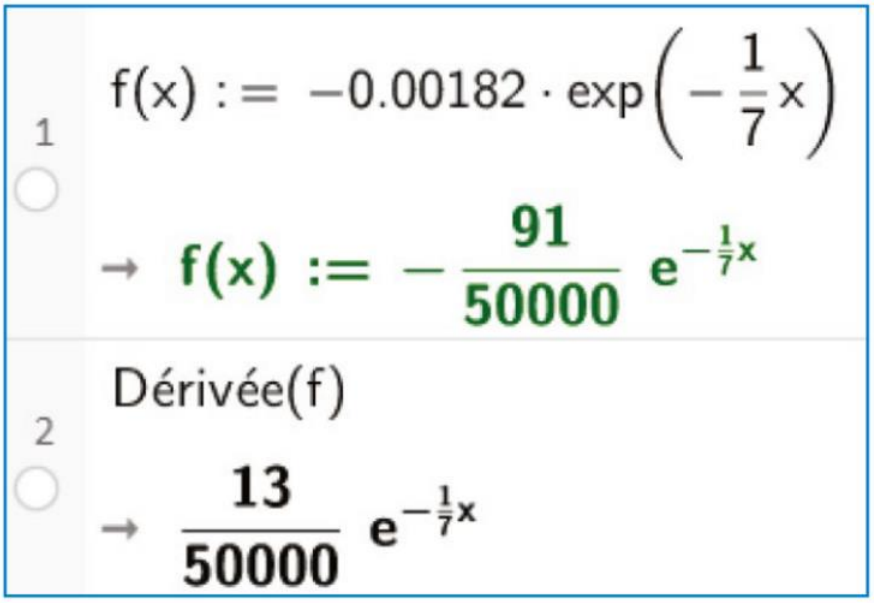
c) $h(t) = -70e^{-0{,}1t}$

8 f est la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x) = -0{,}001\,82\ e^{-\frac{1}{7}x}$$

La fonction dérivée de f a été obtenue à l'aide d'un logiciel de calcul formel.

Justifier le résultat affiché sur la ligne 2.



Faire les exercices 44 à 47 p 149

44 f est la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x) = e^{5x}$$

Déterminer mentalement la fonction dérivée de f.

45 f est la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x) = e^{-5,8x+1}$$

Laquelle de ces affirmations est exacte ?

(1) Pour tout nombre réel x, $f'(x) = -5,8e^{-5,8x}$.

(2) Pour tout nombre réel x, $f'(x) = e^{-5,8x}$.

(3) Pour tout nombre réel x, $f'(x) = -5,8e^{-5,8x+1}$.

46 Déterminer la fonction dérivée de chaque fonction définie sur $\mathbb{R}$ par :

a) $f(x) = e^{0,7x-8}$

b) $g(x) = 6e^{2x} + x$

c) $h(x) = (2x + 1)e^{-0,2x}$

47 Recopier et relier chaque expression d'une fonction f définie sur $\mathbb{R}$ de la colonne de gauche à sa dérivée de la colonne de droite.

$f(x)$		$f'(x)$
e^{2x}	•	• $4e^{2x}$
$2e^{x}$	•	• $2e^{-2x}$
$2e^{2x}$	•	• $2e^{2x}$
$-e^{-2x}$	•	• $2e^{x}$

Faire l'exercice 49 p 149

49 f est la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x) = \frac{e^{-2x+1}}{e^{5x-4}}$$

Amélia affirme : « Pour dériver f, j'utilise la formule de dérivée de $\frac{u}{v}$. »

a) Procéder comme Amélia pour déterminer $f'(x)$.

b) Proposer un procédé plus rapide pour déterminer $f'(x)$.

Faire les exercices 14 et 15 p 146

14 (u_n) est la suite définie pour tout nombre n de $\mathbb{N}$, par $u_n = e^{3n}$.

a) Démontrer que la suite (u_n) est géométrique. Préciser sa raison et son premier terme u_0.

b) Calculer la valeur exacte de la somme :

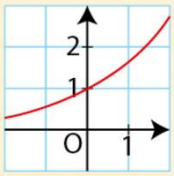
$$S = u_0 + u_1 + u_2 + \ldots + u_5$$

15 (u_n) est la suite définie pour tout nombre n de $\mathbb{N}$, par $u_n = 2e^{-0,5n}$.

a) Démontrer que la suite (u_n) est géométrique. Préciser sa raison et son premier terme u_0.

b) (v_n) est la suite définie pour tout nombre n de $\mathbb{N}$, par $v_n = {u_n}^2$. Exprimer v_n en fonction de n.
Quelle est la nature de la suite (v_n) ? Justifier.

Exercice 69,70,71 p 152

		A	B	C	D
1	Le nombre $\dfrac{e^3 \times e^{-1}}{e^{-2}}$ est égal à …	1	e^{-1}	e^4	e^{-5}
2	Pour tout nombre réel x, $(e^{3x})^2 \times e^{5x}$ est égal à …	e^{5x}	e^{11x}	e^{16x}	e^{30x}
3	f est la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = 0{,}5e^{-0{,}1x}$ Pour tout nombre réel x, $f'(x)$ est égal à …	$-0{,}05e^{-0{,}1x}$	$-0{,}5e^{-0{,}1x}$	$-0{,}1e^{-0{,}1x}$	$0 \times e^{-0{,}1x}$
4	f est la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = (2x+3)e^x$ Pour tout nombre réel x, $f'(x)$ est égal à …	$2e^x$	$(2x+3)e^x$	$(2x+5)e^x$	$(2x+1)e^x$
5	Dans ce repère, la courbe tracée peut représenter la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par … 	$f(x) = e^{-0{,}5x}$	$f(x) = 2e^{0{,}5x}$	$f(x) = 2e^{-0{,}5x}$	$f(x) = e^{0{,}5x}$

		A	B	C	D
1	f est la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = \dfrac{x}{e^x}$ Pour tout nombre réel x, $f'(x)$ est égal à …	$\dfrac{1}{e^x}$	$\dfrac{e^x(1-x)}{(e^x)^2}$	$\dfrac{1-x}{e^x}$	$e^{-x}(1-x)$
2	f est la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = -3{,}1e^{0{,}1x}$ On peut affirmer que …	f est décroissante sur $[0\ ;\ 1]$	f est croissante sur $\mathbb{R}$	f est positive sur $[0\ ;+\infty[$	$f(0) = -3{,}1$
3	f est une fonction définie sur $\mathbb{R}$. Pour tout nombre réel x : $f'(x) = (2x-4)e^x$ On peut affirmer que …	f est décroissante sur $[0\ ;\ 2]$	f est croissante sur $[4\ ;\ 5]$	f est croissante sur $[0\ ;\ 5]$	f admet un maximum en $x = 2$

1 g est la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $g(x) = \dfrac{e^x \times (e^{-x+1})^2}{e^{-x+4}}$.

Affirmation : la fonction g est constante sur $\mathbb{R}$.

2 (u_n) est la suite définie, pour tout nombre n de $\mathbb{N}$, par $u_n = 5e^{0{,}1n-1}$.

Affirmation : la suite (u_n) est géométrique de raison $e^{0{,}1}$ et de premier terme $u_0 = \dfrac{5}{e}$.

3 f est la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = (4x+2)e^x$.

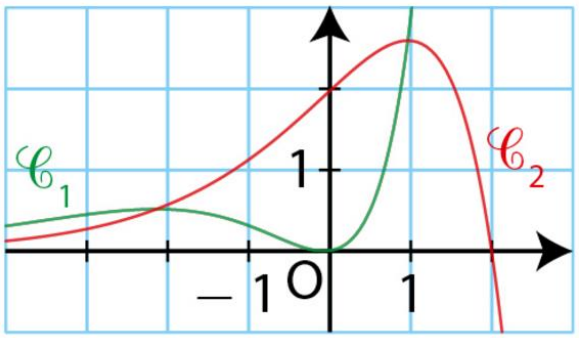
Affirmation : la fonction f admet un minimum en $x = -2$.

4 **Affirmation** : $e^{-1\,000}$ est égal à 0.

87 f et g sont deux fonctions définies sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x) = (2 - x)\mathrm{e}^x \text{ et } g(x) = x^2\mathrm{e}^x.$$

On a représenté ci-dessous ces deux fonctions dans un repère.



a) Déterminer $f'(x)$ et $g'(x)$ pour tout nombre réel x.

b) Étudier le signe de $f'(x)$ puis celui de $g'(x)$.

c) Associer sa courbe à chaque fonction.

98 f est la fonction définie sur l'intervalle $[0 ; 5]$ par :

$$f(t) = 10(1 - e^{-0,3t})$$

Partie A. Étude de la fonction

a) Calculer $f(1)$.

b) Étudier le sens de variation de la fonction f sur l'intervalle $[0 ; 5]$.

c) L'équation $f(t) = 10$ admet-elle des solutions ? Justifier.

d) On admet que l'équation $f(t) = 5$ admet une unique solution α dans l'intervalle $[0 ; 5]$.

Tabuler la fonction f avec la calculatrice, puis donner un encadrement d'amplitude 0,01 de α.

Partie B. Exploitation des résultats

Un incendie a ravagé, pendant t jours, $(t \in [0 ; 5])$, une forêt de 50 hectares dans une région. La superficie, en hectare, brûlée par les flammes au bout de t jours, est modélisée par la fonction f étudiée dans la **partie A**.

Répondre aux questions suivantes en utilisant les résultats de la **partie A**.

a) Quelle est la superficie de forêt brûlée après une journée ? *Arrondir au dixième.*

b) Un journaliste affirme : « 20 % de la superficie de la forêt a été ravagée par l'incendie. » A-t-il raison ?

c) Au bout de combien de jours 5 ha de cette forêt ont-ils été brûlés ?

121 Dater un fragment de charbon

La situation problème

Des fragments de charbon de bois provenant de lampes ont été découverts dans la grotte de Lascaux en 1950. Une des premières datations au carbone 14 a alors été effectuée.
Des mesures ont été faites sur quelques grammes de charbon de bois retrouvé dans la grotte et ont été comparées à celles obtenues à partir d'un même bois vivant.
Utiliser les différentes informations pour retrouver la datation des fragments de charbon de bois.

DOC 1 La désintégration radioactive

À l'instant t, en milliers d'années, le nombre de noyaux radioactifs de carbone 14 est donné par la formule :

$$N(t) = N_0 \times e^{-0,121t}$$

où N_0 est le nombre de noyaux radioactifs de carbone 14 à l'instant initial $t = 0$.

DOC 2 Les mesures obtenues

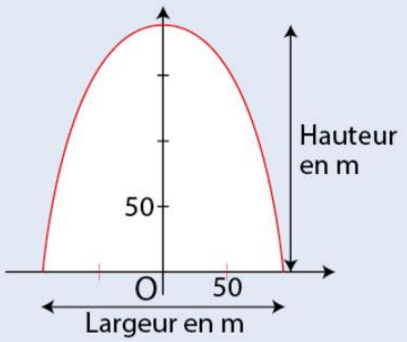
Les fragments de charbon de bois retrouvés dans la grotte ne contiennent plus que 12,5 % de la masse de carbone 14 contenue dans le bois vivant.

122 Déterminer des dimensions

La situation problème

La Gateway Arch est un monument situé dans le centre-ville de Saint-Louis, dans l'état du Missouri aux États-Unis.
Cette arche a la forme d'une chaînette.
Un ingénieur a modélisé la forme de cette arche par la courbe représentative d'une fonction f dans un repère.
Utiliser les différentes informations pour trouver la particularité des dimensions de la Gateway Arch en déterminant la hauteur et la largeur de l'arche.

DOC 1 Allure de la modélisation



DOC 2 Modélisation de l'arche

La fonction f est définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x) = 209{,}6 - 8{,}81\left(e^{-0{,}033x} + e^{0{,}033x}\right)$$

Pour les futurs spécialistes maths

Etudier l'exercice corrigé 77 p 154

Un atelier fabrique des jouets.
Pour un prix n, en euro, le nombre de jouets vendus par semaine, en centaines, est :

$$u_n = 10e^{-0{,}22n}$$

Le responsable de l'atelier a pour objectif de vendre 400 jouets ou plus par semaine.

a) Exécuter l'algorithme ci-contre, en complétant un tableau de suivi des variables.
Ajouter autant de colonnes que nécessaire et arrondir au centième.

```
n ← 0
u ← 10
Tant que u ⩾ 4
    n ← n + 1
    u ← 10e^(−0,22n)
Fin Tant que
```

$u \geqslant 4$		Vrai	Vrai	…
n	0	1	…	…
u	10	8,03	…	…

b) Quelle est la valeur de la variable n obtenue à la fin de l'exécution de l'algorithme ?
Interpréter cette valeur dans le contexte de l'exercice.

Solution

a)

$u \geqslant 4$		Vrai	Vrai	Vrai	Vrai	Vrai	Faux
n	0	1	2	3	4	5	
u	10	8,03	6,44	5,17	4,15	3,33	

b) La valeur de n obtenue à la fin de l'algorithme est $n = 5$.
Cela signifie que le nombre de jouets vendus devient inférieur à 400 dès que le prix du jouet dépasse 5 €.

Pour calculer les valeurs de u, on tabule la suite avec la calculatrice.

La variable u représente le nombre de centaines de jouets vendus, la variable n représente le prix du jouet.

97 Un écrivain a publié en 2012 un nouveau roman.
Pour tout nombre n de $\mathbb{N}$, le nombre d'exemplaires de ce roman, en milliers, vendus l'année $2012 + n$ est donné par :

$$u_n = 5e^{-0,2n}$$

a) Quelle est la nature de la suite (u_n) ?
Justifier.

b) Calculer la valeur exacte, puis l'arrondi au millième de la somme :

$$S = u_0 + u_1 + \ldots + u_6$$

Interpréter ce résultat dans le contexte de l'exercice.

108 Prendre des initiatives

Calculer **Raisonner**

Voici le tableau de variations d'une fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par une expression de la forme :

$$f(x) = (ax + b)e^x$$

où a et b désignent deux nombres réels.

x	$-\infty$		6		$+\infty$
$f(x)$		↗	e^6	↘	

Utiliser les informations données dans le tableau de variations pour déterminer les nombres réels a et b.

********** CORRECTIONS DES EXERCICES **********

11 **a)** $A = e^{10x-8} \times e^{1-2x} = e^{10x-8+1-2x} = e^{8x-7}$

b) $B = \dfrac{e^{x+1}}{4^{x+3}} = e^{x+1-(4x+3)} = e^{x+1-4x-3} = e^{-3x-2}$

c) $C = (e^{5x+2})^2 = e^{(5x+2)\times 2} = e^{10x+4}$

12 **a)** $A = e^{-2,5x} \times e \times e^{0,5x-1}$

$A = e^{-2,5x+1} \times e^{0,5x-1}$

$A = e^{-2,5x+1+0,5x-1}$

$A = e^{-2x}$

b) $B = \dfrac{(e^x)^2}{e^{-2} \times e^{9x}} = \dfrac{e^{2x}}{e^{-2+9x}} = e^{2x-(-2+9x)}$

$B = e^{2x+2-9x} = e^{-7x+2}$

13 $A = e^{-2a}(e^{4a} - 1) - (e^{-a} + e^a)^2$

$A = e^{-2a+4a} - e^{-2a} - (e^{-a\times 2} + 2 \times e^{-a+a} + e^{a\times 2})$

$A = e^{2a} - e^{-2a} - e^{-2a} - 2e^0 - e^{2a}$

$A = -2$

21 **a)** $e^3 \times e^{-1} = e^{3+(-1)} = e^2$

b) $\dfrac{(e^4)^3}{e^2} = \dfrac{e^{4\times3}}{e^2} = \dfrac{e^{12}}{e^2} = e^{12-2} = e^{10}$

22 $A = \dfrac{e^{4x+6}}{e^{3-x}} = e^{4x+6-(3-x)}$

$= e^{4x+6-3+x} = e^{5x+3}$

L'affirmation **(2)** est donc exacte.

23 $B = (e^{5x+1})^2 = e^{(5x+1)\times2} = e^{10x+2}$

Florent a donc tort.

28 **a)** $A = e^{1-x} \times e^{3x-2} = e^{1-x+3x-2} = e^{2x-1}$

b) $B = e^{2x} \times e^{3-5x} + e^{2x+3-5x+1} = e^{-3x+4}$

c) $C = (e^x)^2 \times e^{7+4x} = e^{2x} \times e^{7+4x} = e^{2x+7+4x}$

$C = e^{6x+7}$

d) $D = (e^{2x})^3 \times e^{-3} = e^{6x} \times e^{-3} = e^{6x-3}$

29 **a)** $A = (e^{t+1})^3 = e^{(t+1)\times3} = e^{3t+3}$

b) $B = (e^{-2-3t})^{10} = e^{(-2-3t)\times10} = e^{-20-30t}$

c) $C = (e^{0,6+1,4t})^2 = e^{(0,6+1,4t)\times2} = e^{1,2+2,8t}$

d) $D = (e^{t^2+t-1})^2 = e^{(t^2+t-1)\times2} = e^{2t^2+2t-2}$

31 **a)** $A = \dfrac{e^x \times e^{3x}}{e^{-x} \times e^{4x}} = \dfrac{e^{x+3x}}{e^{-x+4x}} = \dfrac{e^{4x}}{e^{3x}}$

$= e^{4x-3x} = e^x$

b) $B = \dfrac{(e^{-x})^3}{e^{x+4}} = \dfrac{e^{-x\times3}}{e^{x+4}} = \dfrac{e^{-3x}}{e^{x+4}}$

$= e^{-3x-(x+4)} = e^{-3x-x-4} = e^{-4x-4}$

c) $C = (e^{0,5x})^2 \times \dfrac{1}{e^x} = e^{0,5x\times2} \times e^{-x}$

$= e^x \times e^{-x} = e^{x+(-x)} = e^0 = 1$

d) $D = \dfrac{e^{3x} \times e^6}{e \times e^{4x}} \times e^{-5} = \dfrac{e^{3x+6+(-5)}}{e^{1+4x}}$

$= \dfrac{e^{3x+1}}{e^{1+4x}} = e^{3x+1-(1+4x)}$

$= e^{3x+1-1-4x} = e^{-x}$

34 **a)** $1-\dfrac{(e^x-1)^2}{e^{2x}}=1-\dfrac{(e^x)^2-2\times1\times e^x+1^2}{e^{2x}}$

$=1-\dfrac{e^{2x}-2e^x+1}{e^{2x}}=\dfrac{e^{2x}-e^{2x}+2e^x-1}{e^{2x}}$

$=\dfrac{2e^x-1}{e^{2x}}$

b) $\dfrac{1}{e^x}+\dfrac{3-e^x}{e^{2x}}=\dfrac{1\times e^x}{e^x\times e^x}+\dfrac{3-e^x}{e^{2x}}=\dfrac{e^x+3-e^x}{e^{2x}}$

$=\dfrac{3}{e^{2x}}$

3 $f(x)=(5+x)e^x$

f est dérivable sur $\mathbb{R}$. Pour tout nombre réel x,

$u(x)=5+x$ $\quad u'(x)=1$

$v(x)=e^x$ $\quad v'(x)=e^x$

$f'(x)=1\times e^x+(5+x)\times e^x$

$f'(x)=e^x(1+(5+x))$

$f'(x)=e^x(6+x)$

4 **a)** $f(x)=(2x-5)e^x$

f est le produit de deux fonctions dérivables sur $\mathbb{R}$ donc dérivable.

Pour tout nombre réel x,

$u(x)=2x-5$ $\quad u'(x)=2$

$v(x)=e^x$ $\quad v'(x)=e^x$

$f'(x)=2\times e^x+(2x-5)\times e^x$

$f'(x)=e^x(2+(2x-5))$

$f'(x)=e^x(2x-3)$

b) $g(t)=te^t$

La fonction g est le produit de deux fonctions dérivables sur $\mathbb{R}$ donc dérivable sur $\mathbb{R}$.

Pour tout nombre réel t,

$u(t)=t$ $\quad u'(t)=1$

$v(t)=e^t$ $\quad v'(t)=e^t$

$g'(t)=1\times e^t+t\times e^t$

$g'(t)=e^t(1+t)$

5 **a)** $f(t)=4e^t-1$

f est dérivable sur $\mathbb{R}$.

Pour tout nombre réel t, $f'(t)=4e^t$.

b) $g(x)=(-4x-5)e^x+10$

g est dérivable sur $\mathbb{R}$.

Pour tout nombre réel x,

$u(x)=-4x-5$ $\quad u'(x)=-4$

$v(x)=e^x$ $\quad v'(x)=e^x$

$g'(x)=-4\times e^x+(-4x-5)\times e^x+0$

$g'(x)=e^x(-4+(-4x-5))$

$g'(x)=e^x(-4x-9)$

6 **a)** La fonction f est le produit de deux fonctions dérivables donc dérivable sur $\mathbb{R}$.

Pour tout nombre réel x,

$u(x) = x^2$ $\quad$ $u'(x) = 2x$

$v(x) = e^x$ $\quad$ $v'(x) = e^x$

$f'(x) = 2x \times e^x + x^2 \times e^x$

$f'(x) = e^x(x^2 + 2x)$

b) La fonction g est le produit de deux fonctions dérivables sur $\mathbb{R}$ donc dérivable sur $\mathbb{R}$.

Pour tout nombre réel x,

$u(x) = x^2 + 5x - 3$ $\quad$ $u'(x) = 2x + 5$

$v(x) = e^x$ $\quad$ $v'(x) = e^x$

$g'(x) = (2x + 5) \times e^x + (x^2 + 5x - 3) \times e^x$

$g'(x) = e^x(2x + 5 + x^2 + 5x - 3)$

$g'(x) = e^x(x^2 + 7x + 2)$

18 **a)** La fonction f est le produit de deux fonctions dérivables sur $\mathbb{R}$, donc dérivable sur $\mathbb{R}$.

Pour tout nombre réel x,

$u(x) = 5x + 10$ $\quad$ $u'(x) = 5$

$v(x) = e^x$ $\quad$ $v'(x) = e^x$

$f'(x) = 5 \times e^x + (5x + 10) \times e^x$

$f'(x) = e^x(5 + 5x + 10)$

$f'(x) = e^x(5x + 15)$.

b) Pour tout nombre réel x, $e^x > 0$, donc $f'(x)$ est du signe de $5x + 15$.

x	$-\infty$		-3		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	
$f(x)$		↘	$-5e^{-3}$	↗	

$5x + 15 = 0$

$5x = -15$

$x = -3$

$f(-3) = (5 \times (-3) + 10)e^{-3} = -5e^{-3}$.

19 **a)** La fonction g est le produit de deux fonctions dérivables sur $\mathbb{R}$, donc dérivable sur $\mathbb{R}$.

Pour tout nombre réel x,

$u(x) = -x$ $\quad$ $u'(x) = -1$

$v(x) = e^x$ $\quad$ $v'(x) = e^x$

$g'(x) = -1 \times e^x + (-x) \times e^x$

$g'(x) = e^x(-1-x)$.

b) Pour tout nombre réel x, $e^7 > 0$, donc $g'(x)$ est du signe de $-1-x$.

x	$-\infty$		-1		$+\infty$
$g'(x)$		$+$	0	$-$	
$g(x)$		↗	e^{-1}	↘	

$-1-x=0$

$-x=1$

$x=-1$

$g(-1) = -(-1)e^{-1} = e^{-1}$.

37 La fonction f est dérivable sur $\mathbb{R}$.

Pour tout nombre réel x, $f'(x) = e^x$.

38 La fonction f est dérivable sur $\mathbb{R}$.

Pour tout nombre réel x, $f'(x) = -0{,}1e^x$.

L'affirmation (2) est exacte.

39 Les fonctions f, g, h, i, j et k sont dérivables sur $\mathbb{R}$.

Pour tout nombre réel x,

a) $f'(x) = e^x$

b) $g'(x) = 2{,}7e^x$

c) $h'(x) = 5e^x + 1$

d) $i'(x) = 3 - 3e^x$

e) $j'(x) = 15x^2 - 9e^x$

f) $k'(x) = -e^x$

40 **a)** La fonction f est le produit de deux fonctions dérivables sur $\mathbb{R}$, donc dérivable sur $\mathbb{R}$.

Pour tout nombre réel t,

$u(t) = 1-t$ $\quad$ $u'(t) = -1$

$v(t) = e^t$ $\quad$ $v'(t) = e^t$

$f'(t) = -1 \times e^t + (1-t) \times e^t$

$f'(t) = e^t(-1+1-t)$

$f'(t) = -te^t$

41 Les fonctions f, g et h sont les produits de deux fonctions dérivables sur $\mathbb{R}$ donc dérivables sur $\mathbb{R}$.

Pour tout nombre réel x,

a) $u(x) = 2x - 7$ $\quad u'(x) = 2$

$v(x) = e^x$ $\quad v'(x) = e^x$

$f'(x) = 2 \times e^x + (2x - 7) \times e^x$

$f'(x) = e^x(2 + 2x - 7)$

$f'(x) = e^x(2x - 5)$

b) $u(x) = x$ $\quad u'(x) = 1$

$v(x) = e^x$ $\quad v'(x) = e^x$

$g'(x) = 1 \times e^x + x \times e^x$

$g'(x) = e^x(1 + x)$

c) $u(x) = 3x^2 - 2$ $\quad u'(x) = 6x$

$v(x) = e^x$ $\quad v'(x) = e^x$

$h'(x) = 6x \times e^x + (3x^2 - 2) \times e^x$

$h'(x) = e^x(6x + 3x^2 - 2)$

$h'(x) = e^x(3x^2 + 6x - 2)$

42 La fonction f est le quotient de deux fonctions dérivables sur $[0,5 ; +\infty[$ donc dérivable sur $[0,5 ; +\infty[$.

Pour tout nombre réel x de l'intervalle $[0,5 ; +\infty[$,

$u(x) = e^x$ $\quad u'(x) = e^x$

$v(x) = x$ $\quad v'(x) = 1$

$$f'(x) = \frac{e^x \times x - e^x \times 1}{x^2} = \frac{e^x(x - 1)}{x^2}$$

55 La fonction f est le produit de deux fonctions dérivables sur $\mathbb{R}$ donc f est dérivable sur $\mathbb{R}$.

Pour tout nombre réel x,

$u(x) = x^2 - 4$ $\qquad$ $u'(x) = 2x$

$v(x) = e^x$ $\qquad$ $v'(x) = e^x$

$f'(x) = 2x \times e^x + (x^2 - 4) \times e^x$

$f'(x) = e^x(x^2 + 2x - 4)$

Pour tout nombre réel x, $e^x > 0$ donc $f'(x)$ est du signe de $x^2 + 2x - 4$.

x	$-\infty$		$-1-\sqrt{5}$		$-1+\sqrt{5}$		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
$f(x)$		↗	$f(-1-\sqrt{5})$	↘	$f(-1+\sqrt{5})$	↗	

$\Delta = 2^2 - 4 \times 1 \times (-4) = 20$

$x_1 = \dfrac{-2-\sqrt{20}}{2} = -1-\sqrt{5}$

$x_2 = -1+\sqrt{5}$

$f(-1-\sqrt{5}) \approx 0{,}25$

$f(-1+\sqrt{5}) \approx -8{,}51$

20 Les fonctions f et g sont dérivables sur $\mathbb{R}$.

Pour tout nombre réel t,

$f'(t) = 2e^{2t}$ et $g'(t) = -0{,}5e^{-0{,}5t}$.

Pour tout nombre réel t, $e^{2t} > 0$ et $2 > 0$ donc $f'(t) > 0$ et f est croissante sur $\mathbb{R}$.

Pour tout nombre réel t, $e^{-0{,}5t} > 0$ et $-0{,}5 < 0$ donc $g'(t) < 0$ et g est décroissante sur $\mathbb{R}$.

La courbe $\mathscr{C}_1$ est donc celle de la fonction g et $\mathscr{C}_2$ est celle de la fonction f.

58 $f(1) = e^1$ $g(1) = e^{-0,5}$ $h(1) = e^{0,1}$

$-0,5 < 0,1 < 1$

Or la fonction exponentielle est croissante sur $\mathbb{R}$ donc $e^{-0,5} < e^{0,1} < e^1$

$g(1) < h(1) < f(1)$.

La courbe $\mathscr{C}_3$ est donc la courbe représentative de la fonction f, la courbe $\mathscr{C}_1$ est celle de la fonction h et la courbe $\mathscr{C}_2$ est celle de la fonction g.

59 Pour tout nombre réel t de l'intervalle $[0;1,5]$, $2t < 3t$

Or la fonction exponentielle est croissante sur l'intervalle $[0;1,5]$ donc $e^{2t} < e^{3t}$ et $f(t) < g(t)$.

La fonction f est donc représentée par la courbe $\mathscr{C}_1$ et la fonction g par la courbe $\mathscr{C}_2$.

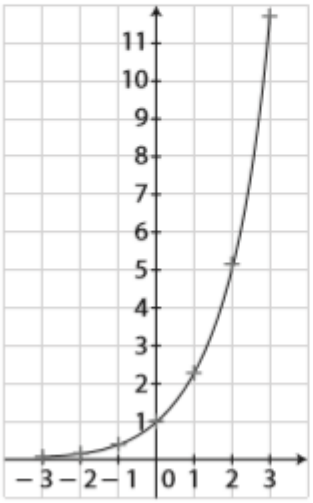
60 **a)** La fonction f est dérivable sur $\mathbb{R}$ et pour tout nombre réel x,

$f'(x) = 0,82e^{0,82x}$.

Pour tout nombre réel x, $e^{0,82x} > 0$ et $0,82 > 0$ donc $f'(x) > 0$ et f est croissante sur $\mathbb{R}$.

x	−3	−2	−1	0	1	2	3
$f(x)$	0,09	0,19	0,44	1	2,27	5,16	11,71

c)



Échelle : $\frac{1}{2}$

7 **a)** La fonction f est dérivable sur $\mathbb{R}$.
Pour tout nombre réel x,
$f'(x) = 7 \times e^{7x} = 7e^{7x}$.
b) La fonction g est dérivable sur $\mathbb{R}$.
Pour tout nombre réel x,
$g'(x) = 1{,}5 \times 0{,}4 \times e^{0{,}4x} = 0{,}6e^{0{,}4x}$.
c) La fonction h est dérivable sur $\mathbb{R}$.
Pour tout nombre réel t,
$h'(t) = -70 \times (-0{,}1)e^{-0{,}1t} = 7e^{-0{,}1t}$.

8 La fonction f est dérivable sur $\mathbb{R}$.
Pour tout nombre réel x,

$$f'(x) = -0{,}00182 \times \left(-\frac{1}{7}\right)e^{-\frac{1}{7}x}$$

$$f'(x) = \frac{13}{50000}e^{-\frac{1}{7}x}$$

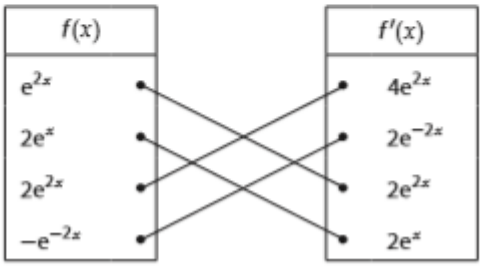
44 La fonction f est dérivable sur $\mathbb{R}$.
Pour tout nombre réel x,
$f'(x) = 5 \times e^{5x} = 5e^{5x}$

45 La fonction f est dérivable sur $\mathbb{R}$.
Pour tout nombre réel x,
$f'(x) = -5{,}8 \times e^{-5{,}8x+1} = -5{,}8e^{-5{,}8x+1}$
L'affirmation **(3)** est donc exacte.

46 **a)** La fonction f est dérivable sur $\mathbb{R}$.
Pour tout nombre réel x,
$f'(x) = 0{,}7 \times e^{0{,}7x-8} = 0{,}7e^{0{,}7x-8}$
b) La fonction g est dérivable sur $\mathbb{R}$.
Pour tout nombre réel x,
$g'(x) = 6 \times 2 \times e^{2x} + 1 = 12e^{2x} + 1$
c) La fonction h est le produit de deux fonctions dérivables sur $\mathbb{R}$ donc h est dérivable sur $\mathbb{R}$.
Pour tout nombre réel x,

$u(x) = 2x + 1$ $\quad u'(x) = 2$
$v(x) = e^{-0,2x}$ $\quad v'(x) = -0,2 \times e^{-0,2x}$
$h'(x) = 2 \times e^{-0,2x} + (2x + 1) \times (-0,2e^{-0,2x})$
$h'(x) = e^{-0,2x}(2 + (2x + 1) \times (-0,2))$
$h'(x) = e^{-0,2x}(2 - 0,4x - 0,2)$
$h'(x) = e^{-0,2x}(1,8 - 0,4x)$

47



49 **a)** La fonction f est dérivable sur $\mathbb{R}$. Pour tout nombre réel x,
$u(x) = e^{-2x+1}$ $\quad u'(x) = -2e^{-2x+1}$
$v(x) = e^{5x-4}$ $\quad v'(x) = 5e^{5x-4}$

$$f'(x) = \frac{-2e^{-2x+1} \times e^{5x-4} - e^{-2x+1} \times 5e^{5x-4}}{(e^{5x-4})^2}$$

$$f'(x) = \frac{-7e^{5x-4} \times e^{-2x+1}}{(e^{5x-4})^2} = \frac{-7e^{-2x+1}}{e^{5x-4}}$$

$f'(x) = -7e^{-2x+1-(5x-4)} = -7e^{-7x+5}$

b) $f(x) = \dfrac{e^{-2x+1}}{e^{5x-4}} = e^{-2x+1-(5x-4)} = e^{-7x+5}$

Ainsi $f'(x) = -7e^{-7x+5}$

14 **a)** Pour tout nombre n de $\mathbb{N}$,

$$u_{n+1} = e^{3(n+1)} = e^{3n+3} = e^{3n} \times e^3 = e^3 \times u_n$$

La suite (u_n) est donc géométrique de raison $q = e^3$.
Son premier terme est $u_0 = e^{3\times 0} = e^0 = 1$.

b) $S = u_0 + u_1 + \ldots + u_5$

$$S = 1 + e^3 + (e^3)^2 + \ldots + (e^3)^5$$

$$S = \frac{1 - (e^3)^{5+1}}{1 - e^3}$$

$$S = \frac{1 - e^{18}}{1 - e^3}$$

15 **a)** Pour tout nombre n de $\mathbb{N}$,

$u_{n+1} = 2e^{-0,5(n+1)} = 2e^{-0,5n-0,5}$

$u_{n+1} = 2e^{-0,5n} \times e^{-0,5} = e^{-0,5} \times u_n$

La suite (u_n) est donc géométrique de raison $q = e^{-0,5}$.

Son premier terme est $u_0 = 2e^{-0,5\times0} = 2$.

b) Pour tout nombre n de $\mathbb{N}$,

$v_n = {u_n}^2 = (2e^{-0,5n})^2 = 4e^{-n}$

$v_{n+1} = 4e^{-(n+1)} = 4e^{-n-1} = 4e^{-n} \times e^{-1} = e^{-1} \times v_n$

La suite (v_n) est donc géométrique de raison e^{-1}.

Son premier terme est $v_0 = 4e^{-0} = 4$.

69 **1.** C **2.** B **3.** A **4.** C **5.** D

70 **1.** B, C, D **2.** A, D **3.** A, B

71 **1. L'affirmation est vraie.**

En effet,

$$g(x) = \frac{e^x \times (e^{-x+1})^2}{e^{-x+4}} = \frac{e^x \times e^{-2x+2}}{e^{-x+4}} = \frac{e^{x-2x+2}}{e^{-x+4}}$$

$$e^{-x+2-(-x+4)} = e^{-x+2+x-4} = e^{-2}$$

La fonction g est donc une fonction constante.

2. L'affirmation est vraie.

En effet, pour tout nombre n de $\mathbb{N}$,

$$u_{n+1} = 5e^{0,1(n+1)-1} = 5e^{0,1n+0,1-1}$$

$$u_{n+1} = 5e^{0,1n-1} \times e^{0,1}$$

$$= e^{0,1}u_n$$

La suite (u_n) est donc géométrique de raison $q = e^{0,1}$ et de premier terme :

$$u_0 = 5e^{0,1\times 0-1} = 5e^{-1} = \frac{5}{e^1}.$$

3. L'affirmation est fausse.

En effet, $f(-2) \simeq -0,812$, $f(-1,9) \simeq -0,8376$ et donc $f(-1,9) < f(-2)$.

4. L'affirmation est fausse.

En effet, pour tout nombre réel x, $e^x > 0$.

87 **a)** Les fonctions f et g sont dérivables sur $\mathbb{R}$ et pour tout nombre réel x,

$u(x) = 2 - x$ $\quad$ $u'(x) = -1$

$v(x) = e^x$ $\quad$ $v'(x) = e^x$

$f'(x) = -1 \times e^x + (2 - x) \times e^x$

$f'(x) = e^x(-1 + 2 - x)$

$f'(x) = e^x(1 - x)$

$u(x) = x^2$ $\quad$ $u'(x) = 2x$

$v(x) = e^x$ $\quad$ $v'(x) = e^x$

$g'(x) = 2x \times e^x + x^2 \times e^x$

$g'(x) = e^x(x^2 + 2x)$

b) Pour tout nombre réel x, $e^x > 0$, donc $f'(x)$ est du signe de $1 - x$ et $g'(x)$ est du signe de $x^2 + 2x$.

x	$-\infty$		1		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	

et

x	$-\infty$		-2		0		$+\infty$
$g'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	

$x^2 + 2x = 0$

$x(x + 2) = 0$

c) La fonction f est croissante sur l'intervalle $]-\infty ; 1]$, la courbe $\mathscr{C}_2$ est donc celle de la fonction f et la courbe $\mathscr{C}_1$ est celle de la fonction g.

98 **Partie A**

a) $f(1) = 10(1 - e^{-0,3}) \approx 2,59$

b) La fonction f est dérivable sur l'intervalle $[0 ; 5]$.

Pour tout nombre réel t de l'intervalle $[0 ; 5]$,

$f'(t) = 10 \times (0 - (-0,3)e^{-0,3t}) = 3e^{-0,3t}$.

Pour tout nombre réel t de $[0 ; 5]$, $e^{-0,3t} > 0$ et $3 > 0$ donc $f'(t) > 0$.

La fonction f est donc croissante sur l'intervalle $[0 ; 5]$.

c) La fonction f admet $f(5) \simeq 7,8$ comme maximum sur l'intervalle $[0 ; 5]$.

L'équation $f(t) = 10$ n'admet donc aucune solution.

d) $2,31 < \alpha < 2,32$.

Partie B

a) La superficie de forêt brûlée après une journée est d'environ 2,6 hectares.

b) $50 \times \frac{20}{100} = 10$.

20 % de 50 hectares représente 10 hectares.

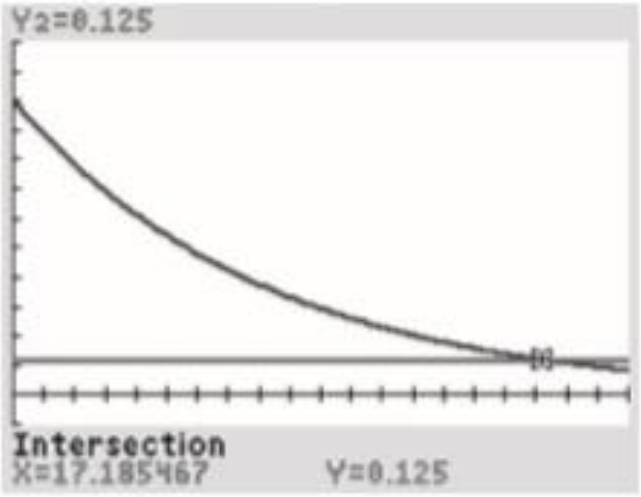
Or $f(t) = 10$ n'a pas de solution.

L'affirmation du journaliste est incorrecte.

c) 5 hectares de forêt ont été brûlés, au bout de 2,32 jours.

121 Dater les fragments de charbon de bois revient à résoudre l'équation $N_0 e^{-0{,}121t} = 0{,}125N_0$ soit $e^{-0{,}121t} = 0{,}125$.

On obtient une valeur approchée de la solution à l'aide de la calculatrice.



fenêtre : $0 \leqslant X \leqslant 20$, pas 1 et $-0{,}1 \leqslant Y \leqslant 1{,}2$, pas 0,1.

On obtient $t \simeq 17{,}2$.

Les fragments de charbon de bois ont environ 17 000 ans.

122 Pour tout nombre réel x,

$f(-x) = f(x)$

La fonction f est donc paire sur $\mathbb{R}$.

La courbe $\mathscr{C}$ est donc symétrique par rapport à l'axe des ordonnées.

La hauteur de l'arche est donc $f(0)$.

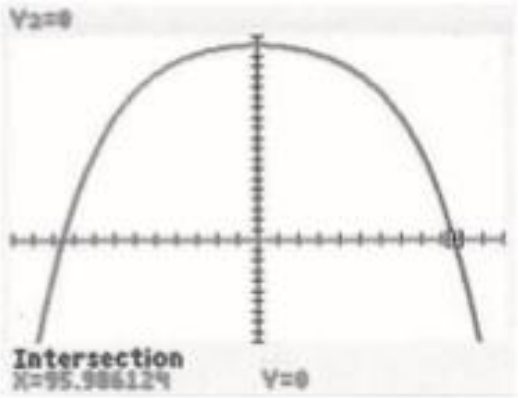
$f(0) = 209{,}6 - 8{,}81(e^0 + e^0)$

$= 191{,}98$

Pour déterminer la largeur de l'arche, il faut résoudre l'équation $f(x) = 0$.

À l'aide de la calculatrice, on obtient une valeur approchée des solutions α et β.

$\alpha \simeq 95{,}99$ $\beta \simeq -95{,}99$.



La largeur de l'arche est donc de 191,98 m et sa hauteur est également de 191,98 m.

97 **a)** Pour tout nombre n de $\mathbb{N}$,

$u_{n+1} = 5e^{-0{,}2(n+1)} = 5e^{-0{,}2n-0{,}2}$

$u_{n+1} = 5e^{-0{,}2n} \times e^{-0{,}2} = e^{-0{,}2}u_n$.

La suite (u_n) est donc géométrique de raison $e^{-0{,}2}$ et de premier terme $u_0 = 5e^0 = 5$.

b) $S = u_0 + u_1 + \ldots + u_6$

$S = 5 + 5e^{-0{,}2} + 5(e^{-0{,}2})^2 + \ldots + 5(e^{-0{,}2})^6$

$S = 5(1 + e^{-0{,}2} + (e^{-0{,}2})^2 + \ldots + (e^{-0{,}2})^6)$

$$S = 5 \times \frac{1-(e^{-0{,}2})^{6+1}}{1-e^{-0{,}2}} = 5 \times \frac{1-e^{-1{,}4}}{1-e^{-0{,}2}}$$

Ainsi $S \simeq 20{,}781$

L'écrivain a vendu 20 781 livres de 2012 à 2018.

108 $f(x) = (ax + b)e^x$.

D'après le tableau de variations $f(6) = e^6$ et $f'(6) = 0$.

La fonction f est dérivable sur $\mathbb{R}$ et pour tout nombre réel x,

$u(x) = ax + b$ $\quad$ $u'(x) = a$

$v(x) = e^x$ $\quad$ $v'(x) = e^x$

$f'(x) = a \times e^x + (ax + b) \times e^x$

$f'(x) = e^x(ax + a + b)$.

Or $f'(6) = 0$, on déduit que :

$e^6(6a + a + b) = 0$

soit $7a + b = \dfrac{0}{e^6} = 0$ et $b = -7a$.

De $f(6) = e^6$, on déduit que :

$$(6a + b)e^6 = e^6$$

soit $6a + b = \dfrac{e^6}{e^6} = 1$

ainsi $6a + b = 1$

Or $b = -7a$ donc $6a - 7a = 1$

on obtient $-a = 1$ donc $a = -1$ et

$b = -7a = -7 \times (-1) = 7$.

Ainsi $f(x) = (-x + 7)e^x$.