

Mathématiques 2 nd	Chapitre 1: Puissances et Racines carrée	Nombres et Calculs
-------------------------------	--	--------------------

I – Puissances entières :

a) Définitions :

Pour n entier naturel non nul et a réel : $a^n = \underbrace{a \times a \times \dots \times a}_{n \text{ facteurs égaux}}$

Par convention : $a \neq 0 : a^0 = 1$.

Pour $a \neq 0$, l'inverse de a^n se note a^{-n} . Autrement dit : $\frac{1}{a^n} = a^{-n}$.

En particulier, $a^1 = a$ et $a^{-1} = \frac{1}{a^1}$

❖ Exemples : $2^3 = 2 \times 2 \times 2 = 8$; $2^{-3} = \frac{1}{2^3} = \frac{1}{8} = 0,125$; $-2^3 = -2 \times (-2) \times (-2) = -8$

b) Propriétés :

Dans les formules suivantes, $a \in \mathbb{R}^*$, $b \in \mathbb{R}^*$, $n \in \mathbb{Z}$ et $p \in \mathbb{Z}$.

Formules	Exemples
Produit de puissances $a^n \times a^p = a^{n+p}$	$3^8 \times 3^6 = 3^{8+6} = 3^{14}$
Quotient de puissances $\frac{a^n}{a^p} = a^{n-p}$	$\frac{5^4}{5^6} = 5^4 \times 5^{-6} = 5^{4-6} = 5^{-2}$
Puissance de puissance $(a^n)^p = a^{n \times p}$	$(x^2)^4 = x^{2 \times 4} = x^8$
Puissance d'un produit $(a \times b)^n = a^n \times b^n$	$3^7 \times 2^7 = (3 \times 2)^7 = 6^7$
Puissance d'un quotient $\left(\frac{a}{b}\right)^n = \frac{a^n}{b^n}$	$\frac{10^4}{5^4} = \left(\frac{10}{5}\right)^4 = 2^4$

c) Ecriture scientifique :

L'écriture scientifique d'un nombre décimal est de la forme $a \times 10^n$ avec a décimal qui possède un seul chiffre avant la virgule c'est-à-dire $-10 < a < 10$ et n entier relatif.

❖ Exemples :

$0,000\ 036 = 3,6 \times 10^{-5}$	$125,37 = 1,2537 \times 10^2$	$0,0047 = 4,7 \times 10^{-3}$
$-2000 = -2 \times 10^3$	$360000 = 3,6 \times 10^5$	$874,6 \times 10^5 = 8,749 \times 10^7$

Remarques :

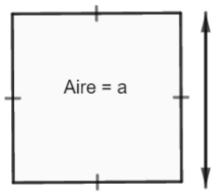
□ Attention ! Il n'existe pas de règle de calcul sur l'addition de deux puissances. Par exemple,

$10^2 + 10^3 \neq 10^5$ en effet $10^2 + 10^3 = 100 + 1000 = 1100$ or $10^5 = 100\ 000$

II – Racines carrées :

a) Définition de la racine carrée d'un nombre positif :

La racine carrée d'un nombre positif a est le nombre positif, noté $\sqrt{a}$, dont le carré vaut a .
Autrement dit $\sqrt{a} \times \sqrt{a} = (\sqrt{a})^2$



Graphiquement, le côté d'un carré d'aire a est $\sqrt{a}$

Remarques :

- ☐ On parle aussi de « radical » pour évoquer le symbole $\sqrt{}$.
- ☐ Un carré parfait est le carré d'un nombre entier.
- ☐ Le carré d'un nombre est toujours positif.
- ☐ Lorsque $a < 0$, $\sqrt{a}$ n'existe pas et n'a pas de sens.

❖ Exemples :

$\sqrt{1} = 1$ car $1^2 = 1$	$\sqrt{9} = 3$ car $3^2 = 9$	$(\sqrt{2})^2 = 2$	$\sqrt{2} \approx 1,414$
------------------------------	------------------------------	--------------------	--------------------------

b) Propriétés

Pour tout nombre a , $\sqrt{a^2} = a$ si $a \geq 0$ et $\sqrt{a^2} = -a$ si $a < 0$.

❖ Exemples : $\sqrt{(-8)^2} = -(-8) = 8$ et $\sqrt{6^2} = 6$

Remarques :

On verra un peu plus tard qu'on peut écrire : pour tout nombre a , $\sqrt{a^2} = |a|$.

En effet, la valeur absolue de a , notée $|a|$, vaut a si $a \geq 0$ et $-a$ si $a < 0$

Par exemple, $|4| = 4$ et $|-2| = 2$

c) Opérations sur les racines carrées :

a et b désignent deux nombres réels positifs.

- $\sqrt{ab} = \sqrt{a} \times \sqrt{b}$
- Si $b \neq 0$, $\sqrt{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}$

☐ Démonstration :

D'une part : $(\sqrt{ab})^2 = ab$

D'autre part : $(\sqrt{ab})^2 = \sqrt{a} \times \sqrt{b} \times \sqrt{a} \times \sqrt{b} = \sqrt{a} \times \sqrt{a} \times \sqrt{b} \times \sqrt{b} = ab$

Or tout est positif ($\sqrt{ab} \geq 0$ et $\sqrt{a} \times \sqrt{b} \geq 0$).

Conclusion : $\sqrt{ab} = \sqrt{a} \times \sqrt{b}$

Exemples : Justifier que les nombres $A = \sqrt{50} \times \sqrt{2}$ et $B = \frac{\sqrt{72}}{\sqrt{18}}$ peuvent s'écrire sous la forme d'un entier.

$$A = \sqrt{50} \times \sqrt{2} = \sqrt{50 \times 2} = \sqrt{100} = \sqrt{10^2} = 10$$

$$B = \frac{\sqrt{72}}{\sqrt{18}} = \sqrt{\frac{72}{18}} = \sqrt{\frac{4 \times 18}{18}} = \sqrt{4} = 2$$

d) Exercices d'application :

❖ Méthode 1 : Comment simplifier une racine carrée ?

On se sert des tables pour simplifier des écritures sous la forme $a\sqrt{b}$ avec a entier positif et b entier positif le plus petit possible. L'idée est de trouver des carrés parfaits.

► Ecrire $C = \sqrt{32}$ et $D = \sqrt{75}$ sous la forme $a\sqrt{b}$, où a et b sont deux entiers, b étant le plus petit possible.

$$C = \sqrt{32} = \sqrt{16 \times 2} = \sqrt{16} \times \sqrt{2} = 4\sqrt{2}$$

$$D = \sqrt{75} = \sqrt{25 \times 3} = \sqrt{25} \times \sqrt{3} = 5\sqrt{3}$$

❖ Méthode 2 : Comment simplifier un produit de racines ?

Décomposer chaque nombre grâce aux tables et utiliser la propriété de produit.

L'idée est de trouver deux facteurs en $\sqrt{a}$ pour donner $\sqrt{a^2} = a$.

► Simplifier l'écriture $\sqrt{8} \times \sqrt{10}$

$$\sqrt{8} \times \sqrt{10} = \sqrt{2 \times 4} \times \sqrt{2 \times 5} = \sqrt{2} \times \sqrt{4} \times \sqrt{2} \times \sqrt{5} = 2 \times \sqrt{2} \times \sqrt{2} \times \sqrt{5} = 4\sqrt{5}$$

❖ Méthode 3 : Comment simplifier une somme ?

Décomposer chaque nombre grâce aux tables et utiliser la propriété de produit.

L'idée est de trouver deux facteurs en $\sqrt{a}$ pour les ajouter.

► Simplifier l'écriture $\sqrt{12} + \sqrt{27}$

$$\sqrt{12} + \sqrt{27} = \sqrt{4 \times 3} + \sqrt{9 \times 3} = 2\sqrt{3} + 3\sqrt{3} = 5\sqrt{3}$$

❖ Méthode 4 : Comment supprimer le radical du dénominateur ?

Il faut multiplier numérateur et dénominateur par le dénominateur.

L'idée est de tomber au dénominateur sur $\sqrt{a^2} = a$.

► Simplifier l'expression :

$$D = \frac{x}{\sqrt{x}} = \frac{x \times \sqrt{x}}{\sqrt{x} \times \sqrt{x}} = \frac{x \times \sqrt{x}}{(\sqrt{x})^2} = \frac{x \times \sqrt{x}}{x} = \sqrt{x}$$

❖ Exercices :

1) Ecrire $E = 14\sqrt{7} - 6\sqrt{7} + 3\sqrt{7}$ et $F = 2\sqrt{45} - 7\sqrt{80}$ sous la forme $a\sqrt{b}$, où a et b sont deux entiers, b étant le plus petit possible.

$$E = 14\sqrt{7} - 6\sqrt{7} + 3\sqrt{7} = \sqrt{7}(14 - 6 + 3) = 11\sqrt{7}$$

$$F = 2\sqrt{45} - 7\sqrt{80} = 2\sqrt{9 \times 5} - 7\sqrt{16 \times 5} = 2\sqrt{9} \times \sqrt{5} - 7\sqrt{16} \times \sqrt{5} = 6\sqrt{5} - 28\sqrt{5} = -22\sqrt{5}$$

2) Développer les expressions suivantes :

$$\begin{aligned} A &= \sqrt{2} \times (\sqrt{72} + 3\sqrt{6}) = \sqrt{2} \times \sqrt{72} + \sqrt{2} \times 3\sqrt{6} \\ &= \sqrt{2} \times \sqrt{36} \times \sqrt{2} + \sqrt{2} \times 3\sqrt{2} \times \sqrt{3} \\ &= \sqrt{2} \times 6 \times \sqrt{2} + \sqrt{2} \times 3\sqrt{2} \times \sqrt{3} \\ &= 12 + 6\sqrt{2} \end{aligned}$$

$$B = (\sqrt{3} + 5)^2 = (\sqrt{3})^2 + 2 \times 5 \times \sqrt{3} + 5^2 = 3 + 10\sqrt{3} + 25 = 28 + 10\sqrt{3}$$

$$C = (\sqrt{x} + 1)(\sqrt{x} - 1) = (\sqrt{x})^2 - 1^2 = x - 1$$