MATHS 2^{nd}	Plan de travail - Ch 7 : Calculs numériques – Equations – Inéquations	CORRECTION

❖ Effectuer des calculs mettant en jeu des puissances

14 **a)** 10^8 **b)** 10^{15} **c)** 10^2 **d)** 10^8

3 **a)** $A = \dfrac{5^8 \times 5^{-6}}{5^3 \times 5^{-10}} = \dfrac{5^2}{5^{-7}} = 5^9$.

b) $B = (2 \times 5)^2 \times (5^2)^{-3} \times (2^2 \times 5)^4$

$B = 2^2 \times 5^2 \times 5^{-6} \times 2^8 \times 5^4 = 2^{10}$

c) $C = 75 \times \left(\dfrac{1}{2}\right)^{-2} = 75 \times 2^2 = 300 = 3 \times 10^2$

d) $D = 10^3 \times 5^{-6} \times 2^{-15} = 10^3 \times (5 \times 2)^{-6} \times 2^{-9}$

$D = 10^{-3} \times 0{,}001953125$

$D = 10^{-3} \times 10^{-3} \times 1{,}953125$

$D = 1{,}953125 \times 10^{-6}$

22 $E = 12^2 \times 9^7 \times 18^{-5} = (2^2 \times 3)^2 \times (3^2)^7 \times (2 \times 3^2)^{-5}$

$E = 2^4 \times 3^2 \times 3^{14} \times 2^{-5} \times 3^{-10} = 2^{-1} \times 3^6$

23 $F = 15^3 \times \dfrac{3^{-2}}{5^2} \times 45^{-2} = (3 \times 5)^3 \times \dfrac{3^{-2}}{5^2} \times (3^2 \times 5)^{-2}$

$F = 3^3 \times 5^3 \times 3^{-2} \times 5^{-2} \times 3^{-4} \times 5^{-2} = 3^{-3} \times 5^{-1}$

95 **a)** $S = \dfrac{2^2 \times 3^3 \times 4^4 \times 5^5 \times 6^6}{60^n}$

$S = \dfrac{2^2 \times 3^3 \times (2^2)^4 \times 5^5 \times (2 \times 3)^6}{(2^2 \times 3 \times 5)^n}$

$S = 2^{2+6+8-2n} \times 3^{3+6-n} \times 5^{5-n}$

$S = 2^{16-2n} \times 3^{9-n} \times 5^{5-n}$

b) S serait une puissance de 2 si, et seulement si, les deux exposants $9 - n$ et $5 - n$ étaient tous les deux nuls, ce qui est impossible puisque les deux équations $9 - n = 0$ et $5 - n = 0$ ont des solutions différentes.

❖ Effectuer des calculs mettant en jeu des racines carrées

27 $\sqrt{4}+\sqrt{9}+\sqrt{16}+\sqrt{25}=2+3+4+5=14$

30 **a)** $\sqrt{18}=\sqrt{9}\times\sqrt{2}=3\sqrt{2}$. Réponse **(1)**

b) $(3\sqrt{5})^2=9\times 5=45$. Réponse **(2)**

34 **a)** $\sqrt{32}=\sqrt{16}\times\sqrt{2}=4\sqrt{2}$

b) $\sqrt{50}=\sqrt{25}\times\sqrt{2}=5\sqrt{2}$

$\sqrt{72}=\sqrt{36}\times\sqrt{2}=6\sqrt{2}$

c) On en déduit :

$3\sqrt{32}-12\sqrt{50}+8\sqrt{72}=12\sqrt{2}-60\sqrt{2}+48\sqrt{2}=0$

35 **a)** $\sqrt{300}=\sqrt{100}\times\sqrt{3}=10\sqrt{3}$

$\sqrt{108}=\sqrt{36}\times\sqrt{3}=6\sqrt{3}$

$\sqrt{192}=\sqrt{64}\times\sqrt{3}=8\sqrt{3}$

b) $B=\sqrt{300}-\sqrt{108}-\sqrt{192}$

$B=10\sqrt{3}-6\sqrt{3}-8\sqrt{3}=-4\sqrt{3}$

38 $A=(5+\sqrt{15})(\sqrt{5}-\sqrt{3})$

$A=\sqrt{5}(\sqrt{5}+\sqrt{3})(\sqrt{5}-\sqrt{3})=\sqrt{5}(5-3)$

$A=\sqrt{5}\times 2=2\sqrt{5}$

$B=(\sqrt{5}+\sqrt{2})(\sqrt{10}-1)$

$B=\sqrt{50}-\sqrt{5}+\sqrt{20}-\sqrt{2}$

$B=5\sqrt{2}-\sqrt{5}+4\sqrt{5}-\sqrt{2}$

$B=4\sqrt{2}+3\sqrt{5}$

40 **a)** Dans le triangle HTC rectangle en H, d'après le théorème de Pythagore :

$TC^2=a^2+(2a)^2=5a^2$

donc $TC=\sqrt{5a^2}=\sqrt{5}\times\sqrt{a^2}=a\sqrt{5}$ car $a>0$.

b) Si $a=\sqrt{5}$, la longueur TC est égale à 5.

44 Si $8x+y=10$, alors $y=10-8x$.

De même, $x=\dfrac{10-x}{8}$, c'est-à-dire $x=\dfrac{5}{4}-\dfrac{1}{8}y$.

46 **a)** Si $V=\dfrac{1}{3}\pi r^2 h$, alors $3V=\pi r^2 h$ soit $\dfrac{3V}{\pi r^2}=h$.

b) Si $V=\dfrac{1}{3}\pi r^2 h$, alors $3V=\pi r^2 h$ et $\dfrac{3V}{\pi h}=r^2$

Donc $r=\sqrt{\dfrac{3V}{\pi h}}$ car $r>0$.

21 **a)** $4x = \frac{1}{3}$ équivaut à $x = \frac{1}{12}$. $\mathscr{S} = \left\{\frac{1}{12}\right\}$.

b) $\frac{2}{5}x = 3$ équivaut à $x = \frac{15}{2}$. $\mathscr{S} = \left\{\frac{15}{2}\right\}$.

c) $\frac{3}{7}x = \frac{2}{9}$ équivaut à $x = \frac{14}{27}$. $\mathscr{S} = \left\{\frac{14}{27}\right\}$.

23 **a)** $\mathscr{S} = \{-3\,;-2\}$ **b)** $\mathscr{S} = \{-4\,;4\}$

c) $\mathscr{S} = \left\{-\frac{3}{2}\,;\frac{3}{2}\right\}$ **d)** $\mathscr{S} = \left\{-1\,;0\,;\frac{1}{2}\right\}$

25 **a)** Pour $x \neq 2$, $\frac{2x+1}{x-2} = 0$ équivaut à $2x + 1 = 0$ c'est-à-dire $x = -\frac{1}{2}$. $\mathscr{S} = \left\{-\frac{1}{2}\right\}$.

$x - 2 = 0$ équivaut à $x = 2$. On résout donc chaque équation dans $\mathbb{R} - \{2\}$.

b) Pour $x \neq 2$, $\frac{(4x-5)^2}{x-2} = 0$

équivaut à $(4x-5)^2 = 0$,

c'est-à-dire $4x - 5 = 0$, soit $\frac{5}{4}$. $\mathscr{S} = \left\{\frac{5}{4}\right\}$.

c) Pour $x \neq 2$, $\frac{(x-5)(x+6)}{x-2} = 0$

équivaut à $(x-5)(x+6) = 0$, c'est-à-dire $x - 5 = 0$ ou $x + 6 = 0$, soit $x = 5$ ou $x = -6$. $\mathscr{S} = \{-6\,;5\}$

30 **a)** Pour tout nombre réel x,

$E(x) = (3x-7)(1+2x-4)$

$E(x) = (3x-7)(2x-3)$.

b) $E(x) = 0$ équivaut à $3x - 7 = 0$ ou $2x - 3 = 0$, soit $x = \frac{7}{3}$ ou $x = \frac{3}{2}$.

$\mathscr{S} = \left\{\frac{3}{2}\,;\frac{7}{3}\right\}$.

31 **a)** $(2x-1)(x+3) - (2x-1)(3x-1) = 0$ équivaut à $(2x-1)(x+3-(3x-1)) = 0$, c'est-à-dire $(2x-1)(-2x+4) = 0$, soit $x = \frac{1}{2}$ ou $x = 2$.

$\mathscr{S} = \left\{\frac{1}{2}\,;2\right\}$.

b) $(x-2)(x+3) = (x-5)(x+1)$ équivaut à $x^2 + x - 6 = x^2 - 4x - 5$, c'est-à-dire $5x = 1$, soit $x = \frac{1}{5}$. $\mathscr{S} = \left\{\frac{1}{5}\right\}$.

c) $5x^2 = 3x$ équivaut à $5x^2 - 3x = 0$, c'est-à-dire $x(5x-3) = 0$, soit $x = 0$ ou $x = \frac{3}{5}$. $\mathscr{S} = \left\{0\,;\frac{3}{5}\right\}$.

d) $(x-1)^2 - (x-2)^2 = 0$

équivaut à $x^2 - 2x + 1 - x^2 + 4x - 4 = 0$

c'est-à-dire $2x - 3 = 0$ soit $x = \frac{3}{2}$.

$\mathscr{S} = \left\{\frac{3}{2}\right\}$.

93 **a)** Pour tout nombre réel x,

$(x-2)(x^2-1) = x^3 - x - 2x^2 + 2$

$(x-2)(x^2-1) = x^3 - 2x^2 - x + 2$

b) $x^3 - 2x^2 - x + 2 = (x-2)(x+1)(x-1)$.

$x^3 - 2x^2 - x + 2 = 0$ équivaut à $x = 2$ ou $x = -1$ ou $x = 1$. $\mathscr{S} = \{-1;1;2\}$.

78 **a)** L'inégalité doit être inversée car chaque membre de l'inéquation $-6x \leqslant -2$ est divisé par -6 qui est négatif. De plus le dénominateur de la fraction est -6. D'où $x \geqslant \frac{-2}{-6}$,

C'est-à-dire $x \geqslant \frac{1}{3}$.

L'ensemble des solutions de l'inéquation est $\mathscr{S} = \left[\frac{1}{3}\,;+\infty\right[$.

b) $-6x + 3 \geqslant -3x + 1$ équivaut à $x \leqslant \frac{2}{3}$.

$\mathscr{S} = \left]-\infty\,;\frac{2}{3}\right]$.

2 Inéquations

1 **a)** $312 + 3 \times 2 \times 12 = 384$. Donc Lamia paiera 384 € avec le pack A.
b) $216 + 5 \times 2 \times 12 = 336$. Donc Lamia paiera 336 € avec le pack B.

2 **a)** $A(x) = 312 + 3x$.
b) $B(x) = 216 + 5x$.
c) $x = 60$ ou $x = 72$ ou $x = 84$ vérifient $312 + 3x < 216 + 5x$.
Maxence paiera moins cher avec le pack A si il prend 60, 72 ou 84 leçons.
d) En tabulant à l'aide d'une calculatrice les fonctions $x \mapsto 312 + 3x$ et $x \mapsto 216 + 5x$, avec les nombres entiers naturels, on conjecture que pour $x > 48$, $312 + 3x < 216 + 5x$.

82 **a)** Case rouge : $212{,}44 + 0{,}061x$.
Case bleue : $a = b$. Case verte : $a < b$.
Case noire : Le fournisseur B est plus avantageux.
b) On résout l'inéquation :
$268{,}36 + 0{,}059x < 212{,}44 + 0{,}061x$,
c'est-à-dire $55{,}92 < 0{,}002x$ soit $x > 27\,960$.
Le fournisseur A est plus avantageux à partir de 27 960 kWh consommés.

73 On note x la longueur AM, avec $0 \leqslant x \leqslant 8$.

L'aire du trapèze AMCD est égale à $\dfrac{5(8+x)}{2}$.

L'aire du triangle BCD est égale à $\dfrac{5(8-x)}{2}$.

Le problème posé se traduit par l'inéquation :

$$\frac{5(8+x)}{2} \geqslant 3 \times \frac{5(8-x)}{2}.$$

$\dfrac{5(8+x)}{2} \geqslant 3 \times \dfrac{5(8-x)}{2}$

équivaut à $40 + 5x \geqslant 120 - 15x$, soit $x \geqslant 4$.

L'aire de AMCD est supérieure ou égale au triple de l'aire de BCM si, et seulement si, le point M situé sur $[\mathrm{AB}]$ est tel que $\mathrm{AM} \geqslant 4$.