Mathématiques 1ère EDS	Chapitre 1 : Le second degré	Algèbre

I – Fonctions polynômes du second degré :

a) Forme développée réduite :

☐ Définition

Une fonction polynôme du second degré ou trinôme est une fonction définie sur $\mathbb{R}$ qui peut s'écrire sous la forme : $\boldsymbol{f(x) = ax^2 + bx + c}$ où a, b et c sont des réels avec $\boldsymbol{a \neq 0}$.

Cette forme d'écriture est appelée forme développée réduite.
Les nombres a, b, c sont les **coefficients** du polynôme.
La courbe représentative d'une fonction polynôme du second degré est une parabole.

❖ **Remarque :**

Polynôme signifie plusieurs monômes. Un monôme désigne une expression de la forme ax^n, où $a \in \mathbb{R}$ est le coefficient du monôme, et $n \in \mathbb{N}$ est son degré.

❖ **Exemple :** Compléter le tableau suivant

Expression de la fonction	Fonction polynôme oui/non	Degré du polynôme	Si fonction polynôme du second degré, préciser les paramètres suivants		
			Valeur de a (Coefficient de x^2)	Valeur de b (Coefficient de x)	Valeur de c (Terme constant)
$5x^2 + 3x - 7$	oui	2	5	3	-7
$7x^2 - \frac{1}{x}$	non				
x^2	oui	2	1	0	0
$5x - 3$	oui	1			
$5x^4 - 7x^3 + 3x - 8$	oui	4			
$4 - x^2$	oui	2	-1	0	4
$5 - 4x^2 + 2x\sqrt{2}$	oui	2	-4	$2\sqrt{2}$	5

b) Forme canonique :

La forme canonique d'un polynôme du second degré est celle qui s'écrit en utilisant une seule fois la lettre x, et qui permet de trouver facilement le programme de calcul de la fonction.
Elle est toujours de la forme **$f(x) = a(x - \alpha)^2 + \beta$**.

❖ **Etude d'exemples :**

➢ Pour trouver cette forme d'écriture, on utilise la méthode de complétion du carré.

- $f(x) = x^2 - 5x + 6 = x^2 - 2 \times \frac{5}{2}x + \left(\frac{5}{2}\right)^2 - \left(\frac{5}{2}\right)^2 + 6 = \left(x - \frac{5}{2}\right)^2 - \frac{25}{4} + 6$

$\boldsymbol{f(x) = \left(x - \frac{5}{2}\right)^2 - \frac{1}{4}}$ est la forme canonique de $f(x)$.

- $g(x) = 3x^2 + 12x - 7 = 3\left(x^2 + 4x - \frac{7}{3}\right) = 3\left[(x + 2)^2 - 4 - \frac{7}{3}\right] = 3\left[(x + 2)^2 - \frac{19}{3}\right]$

$\boldsymbol{g(x) = 3(x + 2)^2 - 19}$ est la forme canonique de $g(x)$

❖ Démonstration dans le cas général :

$f(x) = a\left(x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a}\right)$ mise en facteur du coefficient a de x (à faire dès qu'il est différent de 1)

$= a\left[\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{b^2}{4a^2} + \frac{c}{a}\right]$ reconnaissance du début d'un carré (cela s'appelle la méthode de complétion du carré)

$= a[\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{b^2-4ac}{4a^2}]$ mise au même dénominateur des deux fractions

$= a\left(x - \frac{-b}{2a}\right)^2 - \frac{b^2-4ac}{4a}$ en posant $\alpha = \frac{-b}{2a}$ et $\beta = -\frac{b^2-4ac}{4a}$, on obtient pour tout réel x, $\boldsymbol{f(x) = a(x-\alpha)^2 + \beta}$

☐ Définition et propriété

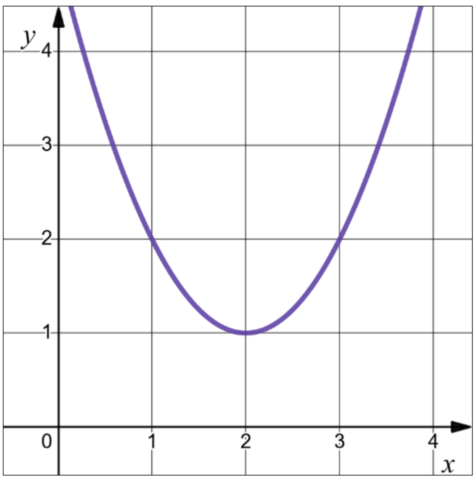
Tout polynôme du second degré $f(x) = ax^2 + bx + c$ admet pour **forme canonique** :

$$\boldsymbol{f(x) = a(x-\alpha)^2 + \beta} \qquad \textbf{avec} \qquad \boldsymbol{\alpha = \frac{-b}{2a}} \ \textbf{et} \ \boldsymbol{\beta = f\left(\frac{-b}{2a}\right)}$$

a est le coefficient de x^2 (le même que celui de la forme développée),

et **α et β sont les coordonnées du sommet de la parabole qui représente f.**

on donne $a = 1$

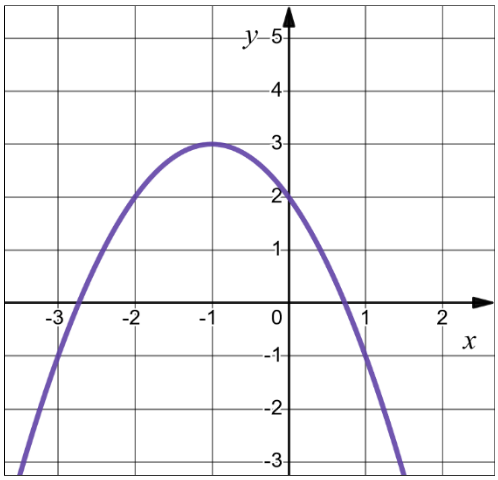


Coordonnées du sommet : (2 ; 1)

Expression de la fonction représentée :

$f(x) = (x-2)^2 + 1$

on donne $a = -1$



Coordonnées du sommet : (-1 ; 3)

Expression de la fonction représentée :

$g(x) = -(x+1)^2 + 3$

❖ Démontrons dans le cas général que β est bien le minimum ou le maximum de f sur $\mathbb{R}$ et qu'il est atteint en α

Le point S(α ; β) est bien un point de la parabole car $f(\alpha) = a \times 0 + \beta = \beta$.

• Comme $(x - \alpha)^2 \geqslant 0$ pour tout $x \in \mathbb{R}$, alors pour tout $x \in \mathbb{R}$:

si $a > 0$

par propriété des inégalités

$(x - \alpha)^2 \geqslant 0 \Leftrightarrow a(x-\alpha)^2 \geq 0$

$\Leftrightarrow a(x-\alpha)^2 + \beta \geq \beta$

$\Leftrightarrow f(x) \geq \beta$

Donc β est le minimum de f sur $\mathbb{R}$ atteint en α

si $a < 0$

par propriété des inégalités

$(x - \alpha)^2 \geqslant 0 \Leftrightarrow a(x-\alpha)^2 \leq 0$

$\Leftrightarrow a(x-\alpha)^2 + \beta \leq \beta$

$\Leftrightarrow f(x) \leq \beta$

Donc β est le maximum de f sur $\mathbb{R}$ atteint en α

❖ **Exercice d'application : Déterminer la forme canonique et l'extremum d'un polynôme de degré 2 :**

1) Dans chaque cas, écrire le trinôme sous sa forme canonique :

- $x^2 + 6x - 8 = x^2 + 2 \times 3x + 3^2 - 3^2 - 8 = (x-3)^2 - 3^2 - 8 = \boldsymbol{(x-3)^2 - 17}$

- $2x^2 + 6x + 4 = 2(x^2 + 3x + 2) = 2\left(x^2 + 2 \times \frac{3}{2}x + \left(\frac{3}{2}\right)^2 - \left(\frac{3}{2}\right)^2 + 2\right)$

$$= 2\left(\left(x + \frac{3}{2}\right)^2 - \frac{9}{4} + \frac{8}{4}\right)$$

$$= 2\left(\left(x + \frac{3}{2}\right)^2 - \frac{1}{4}\right) = \boldsymbol{2\left(x + \frac{3}{2}\right)^2 - \frac{1}{2}}$$

2) Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = -2x^2 + 8x - 13$.

a. Déterminer la forme canonique de la fonction f.

b. En déduire le maximum de f et la valeur de x pour laquelle il est atteint.

a. On a $f(x) = -2x^2 + 8x - 13 = -2(x^2 - 4x + 6{,}5) = -2(x^2 - 2 \times 2x + 2^2 - 2^2 + 6{,}5)$

$$= -2((x-2)^2 + 2{,}5) = -2(x-2)^2 - 5$$

b) D'après la forme canonique obtenue, $a = -2 < 0$, $\alpha = 2$ et $\beta = -5$ donc cette parabole a pour sommet (2 ; 5) , de ce fait, le maximum de f est $M = -5$, atteint pour $x = 2$.

c) Sens de variation et représentation graphique :

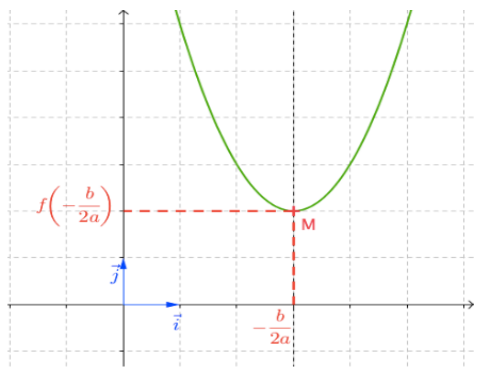
☐ **Définition et propriété**

Soit la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = ax^2 + bx + c$, avec $a \neq 0$.

La courbe représentative de f dans un repère orthonormé est une **parabole**.
Le point M de coordonnées $\left(-\frac{b}{2a} ; f\left(-\frac{b}{2a}\right)\right)$ est le **sommet** de la parabole.
Il correspond au maximum (ou au minimum) de la fonction f.
La parabole possède un **axe de symétrie**. Il s'agit de la droite d'équation $x = -\frac{b}{2a} = \alpha$.

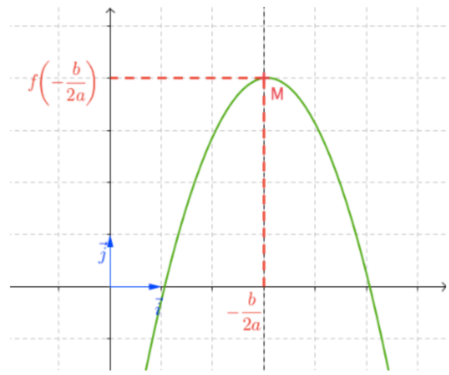
si $a > 0$:

x	$-\infty$	$\alpha = \frac{-b}{2a}$	$+\infty$
$f(x)$	↘	$\beta = f(\alpha)$	↗



si $a < 0$:

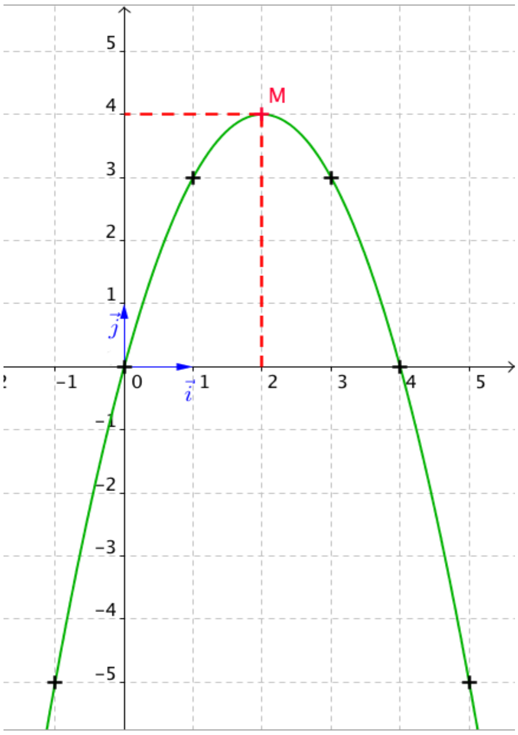
x	$-\infty$	$\alpha = \frac{-b}{2a}$	$+\infty$
$f(x)$	↗	$\beta = f(\alpha)$	↘



❖ Exercice d'application : Variation et représentation graphique d'une fonction du second degré

Soit la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = -x^2 + 4x$.

1) Déterminer la forme canonique de la fonction f , puis en déduire les coordonnées de son sommet.
2) Dresser le tableau de variation de la fonction
3) Représenter graphiquement la fonction f.



1) La fonction f peut s'écrire sous sa forme canonique :

$$\begin{aligned} f(x) &= -x^2 + 4x \\ &= -(x^2 - 4x) \\ &= -(x^2 - 4x + 4 - 4) \\ &= -((x-2)^2 - 4) \\ &= -(x-2)^2 + 4 \end{aligned}$$

2) f admet donc un maximum en 2 égal à $f(2) = -(2-2)^2 + 4 = 4$
Les coordonnées du sommet sont (2 ; 4)

3) Les variations de f sont donc données par le tableau suivant :

x	$-\infty$	2	$+\infty$
f	↗	4	↘

On obtient la courbe représentative de f ci-contre.

II – Résolution d'une équation du second degré :

☐ Définition :

Une **équation du second degré** est une équation de la forme $ax^2 + bx + c = 0$ où a, b et c sont des réels avec $a \neq 0$.

Une solution de cette équation s'appelle une **racine** du trinôme $ax^2 + bx + c$.

Exemple : L'équation $3x^2 - 6x - 2 = 0$ est une équation du second degré.

❖ Détermination des solutions d'un équation du second degré (ou racines du trinôme) :

Soit a, b et c trois réels avec $a \neq 0$ et l'équation $ax^2 + bx + c = 0$
Pour résoudre cette équation dans $\mathbb{R}$, il faut pouvoir factoriser le trinôme.

On a vu que $ax^2 + bx + c = a\left(x - \frac{-b}{2a}\right)^2 - \frac{b^2-4ac}{4a}$ Notons $\Delta = b^2 - 4ac$ appelé son discriminant,

on a donc $ax^2 + bx + c = 0 \Leftrightarrow a\left[\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{\Delta}{4a^2}\right] = 0 \Leftrightarrow \left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{\Delta}{4a^2} = 0$ car $\boldsymbol{a \neq 0}$

NB :Discriminer (latin *discriminare,* distinguer) : Différencier, en vue d'un traitement séparé, plusieurs éléments les uns des autres en les identifiant comme distincts.
Le discriminant Δ va ainsi servir à distinguer trois cas, selon qu'il sera strictement positif, nul ou strictement négatif.

▶ **1er cas : $\Delta < 0$**

Dans ce cas $\frac{\Delta}{4a^2} < 0$ donc $-\frac{\Delta}{4a^2} > 0$,comme pour tout $x \in \mathbb{R}$ $\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 \geq 0$ alors $\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{\Delta}{4a^2} > 0$
Il n'existe aucun réel x tel que $\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{\Delta}{4a^2} = 0$

donc **l'équation** $ax^2 + bx + c = 0$ **n'a pas de solution dans** $\mathbb{R}$ **.**

▶ **2ème cas : $\Delta = 0$**

Dans ce cas $\frac{\Delta}{4a^2} = 0$ et l'équation $ax^2 + bx + c = 0 \Leftrightarrow \left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 = 0 \Leftrightarrow x + \frac{b}{2a} = 0 \Leftrightarrow x = \frac{-b}{2a}$

L'équation $ax^2 + bx + c = 0$ admet donc comme unique solution $\boldsymbol{x_0} = \frac{\boldsymbol{-b}}{\boldsymbol{2a}}$ (appelée également racine double)

▶ **3ème cas : $\Delta > 0$**

Dans ce cas $\frac{\Delta}{4a^2} = \left(\frac{\sqrt{\Delta}}{2a}\right)^2$, la factorisation est donc la suivante :

$$\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{\Delta}{4a^2} = 0 \Leftrightarrow \left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \left(\frac{\sqrt{\Delta}}{2a}\right)^2 = 0$$

$\Leftrightarrow \left(x + \frac{b}{2a} - \frac{\sqrt{\Delta}}{2a}\right)\left(x + \frac{b}{2a} + \frac{\sqrt{\Delta}}{2a}\right) = 0$ par factorisation $a^2 - b^2 = (a-b)(a+b)$

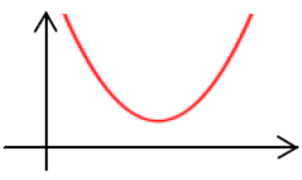
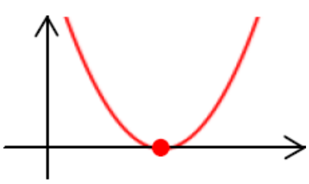
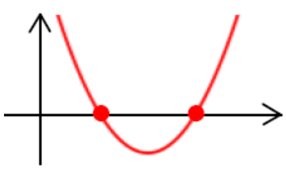
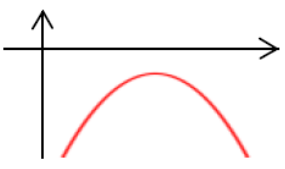
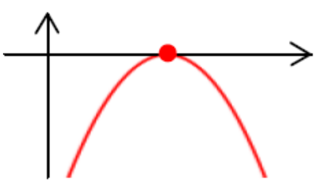
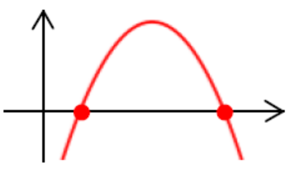
$$\Leftrightarrow \left(x + \frac{b}{2a} - \frac{\sqrt{\Delta}}{2a}\right) = 0 \quad \text{ou} \quad \left(x + \frac{b}{2a} + \frac{\sqrt{\Delta}}{2a}\right) = 0$$

$$\Leftrightarrow x = \frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a} \quad ou \quad x = \frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}$$

L'équation a donc deux solutions $\boldsymbol{x_1 = \frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}} \quad \boldsymbol{ou} \quad \boldsymbol{x_2 = \frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}}$.

EN RESUME

Soit un trinôme où *a*, *b* et *c* trois nombres réels tels que $a \neq 0$. On note son discriminant $\boxed{\Delta = \boldsymbol{b^2 - 4ac}}$

		Si $\Delta < 0$	**Si $\Delta = 0$**	**Si $\Delta > 0$**
SOLUTIONS / RACINES		L'équation n'a pas de solution dans $\mathbb{R}$ Le trinôme n'a pas de racine	L'équation a une unique solution $x_0 = \frac{-b}{2a}$ dans $\mathbb{R}$ Le trinôme a une seule racine (appelée racine double)	L'équation a deux solutions distinctes dans $\mathbb{R}$ $\boldsymbol{x_1 = \frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}} \quad \boldsymbol{ou} \quad \boldsymbol{x_2 = \frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}}$ Le trinôme a deux racines distinctes
FACTORISATION		On ne peut pas factoriser le trinôme.	On a : $ax^2 + bx + c = \boldsymbol{a(x - x_0)^2}$	On a : $ax^2 + bx + c = \boldsymbol{a(x - x_1)(x - x_2)}$
ILLUSTRATION	a>0			
	a<0			

❖ **Exercice d'application : Résoudre une équation du second degré à l'aide du discriminant**

Résoudre les équations suivantes :

a) $2x^2 - x - 6 = 0$ On reconnaît une équation du second degré donc on calcule le discriminant $\Delta = b^2 - 4ac$, ici $a = 2$, $b = -1$ et $c = -6$ donc $\Delta = (-1)^2 - 4 \times 2 \times (-6) = 49$. $\Delta > 0$, donc l'équation possède deux solutions distinctes : $x_1 = \frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-(-1)-\sqrt{49}}{2\times2} = -\frac{3}{2}$ et $x_2 = \frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-(-1)+\sqrt{49}}{2\times2} = 2$ L'ensemble des solutions est $S = \left\{-\frac{3}{2}; 2\right\}$.
b) $2x^2 - 3x + \frac{9}{8} = 0$ On reconnaît une équation du second degré donc on calcule le discriminant $\Delta = b^2 - 4ac$, ici $a = 2$, $b = -3$ et $c = \frac{9}{8}$ donc $\Delta = b^2 - 4ac$ $= (-3)^2 - 4 \times 2 \times \frac{9}{8} = 0$. $\Delta = 0$, donc l'équation possède une unique solution : $x_0 = -\frac{b}{2a} = -\frac{-3}{2\times2} = \frac{3}{4}$ L'ensemble des solutions est $S = \left\{\frac{3}{4}\right\}$.
c) $x^2 + 3x + 10 = 0$ On reconnaît une équation du second degré donc on calcule le discriminant $\Delta = b^2 - 4ac$, ici $a = 1$, $b = 3$ et $c = 10$ $\Delta = 3^2 - 4 \times 1 \times 10 = -31$. $\Delta < 0$, l'équation ne possède pas de solution réelle ; on note $S = \{\varnothing\}$

❖ **Exercice d'application : Factoriser un polynôme du second degré :**

1) Factoriser les polynômes suivant sans utiliser le discriminant.

$4x^2 + 7x$ $= x(4x + 7)$	$25x^2 - 36$ $= (5x)^2 - 6^2 = (5x - 6)(5x + 6)$	$x^2 + 8x + 16$ $= x^2 + 2 \times 4x + 4^2 = (x + 4)^2$

2) Factoriser les fonctions $f(x) = 4x^2 + 19x - 5$ et $g(x) = 9x^2 - 6x + 1$ à l'aide du discriminant.

- Factorisation de $f(x) = 4x^2 + 19x - 5$.

On reconnaît une fonction polynôme du second degré donc
on calcule le discriminant $\Delta = b^2 - 4ac$, ici $a = 4$, $b = 19$ et $c = -5$

donc $\Delta = 19^2 - 4 \times 4 \times (-5) = 441$

$\Delta > 0$, donc le trinôme possède deux racines distinctes :

$x_1 = \frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-19-\sqrt{441}}{2\times4} = -5$ et $x_2 = \frac{-19+\sqrt{441}}{2\times4} = \frac{1}{4}$

On a donc : $f(x) = 4x^2 + 19x - 5 = 4\left(x - (-5)\right)\left(x - \frac{1}{4}\right) = (x+5)(4x-1)$.

- Factorisation de $g(x) = 9x^2 - 6x + 1$.

On reconnaît une fonction polynôme du second degré donc
on calcule le discriminant $\Delta = b^2 - 4ac$, ici $a = 9$, $b = -6$ et $c = 1$

donc $\Delta = (-6)^2 - 4 \times 9 \times 1 = 0$

$\Delta = 0$, donc le trinôme possède une unique racine :

$x_0 = \frac{-b}{2a} = \frac{-(-6)}{2\times9} = \frac{1}{3}$

On a donc : $g(x) = 9x^2 - 6x + 1 = 9\left(x - \frac{1}{3}\right)^2 = (3x-1)^2$.

☐ Propriété de la somme et du produit des racines : (démonstration côté exercice)

Soit un trinôme $ax^2 + bx + c$ ayant deux racines $\boldsymbol{x_1}$ et $\boldsymbol{x_2}$ distinctes alors :

- La somme des racines $\boldsymbol{S = x_1 + x_2 = -\frac{b}{a}}$
- Le produit P des racines $\boldsymbol{P = x_1 \times x_2 = \frac{c}{a}}$.

❖ Exercice d'application : Résoudre une équation en utilisant une racine évidente

Repérer une racine évidente de l'équation $x^2 - 6x + 5 = 0$ puis terminer la résolution de cette équation.
1 est une racine évidente de cette équation du second degré.
En effet, $1^2 - 6 \times 1 + 5 = 0$, l'autre solution x_2 vérifie $P = \frac{c}{a} = \frac{5}{1} = 1 \times x_2$
donc $x_2 = 5$
L'ensemble des solutions est $S = \{1; 5\}$.

II – Algorithmie : Pour tester les programmes aller sur la rubrique ENT

Code Python

```python
# Calcul de alpha et de beta
from math import *
def formecanonique(a,b,c):
    alpha = -b/(2*a)
    beta = a*alpha**2 + b*alpha + c
    return alpha, beta
```

Début de la console python

```
>>> formecanonique(-3,-5,2)
(-0.8333333333333334, 4.083333333333334)
```

Fin de la console python

Code Python

```python
# Calcul de delta
from math import *
def delta(a,b,c):
    delta = b**2 -4*a*c
    return delta
```

Début de la console python

```
>>> delta(-3,-5,2)
49
```

Fin de la console python

Code Python

```python
# Calcul des éventuelles racines
from math import *
def racines(a,b,c):
    # Calcul de Delta avec la fonction précédente
    d = delta(a,b,c)
    print(f"Delta={d}")
    if d < 0 :
        print("Aucune racine")
    elif d == 0 :
        print(f"Une racine, {-b/(2*a)}")
    else :
        print(f"Deux racines, {(-b+sqrt(d))/(2*a)} et {(-b-sqrt(d))/(2*a)}")
```

Début de la console python

```
>>> racines(-3,-5,2)
Delta=49
Deux racines, -2.0 et 0.3333333333333333
>>> racines(1,1,1)
Delta=-3
Aucune racine
>>> racines(1,-2,1)
Delta=0
Une racine, 1.0
```

Fin de la console python