

MATHS 1^{ère}SPé	Devoir en Temps Libre n°2	Correction
---	----------------------------------	-------------------

Exercice 1 :

QCM, dans chaque cas donner la (ou les) réponse(s) exacte(s) sans justifier

Question	a	b	c	d
La forme canonique du polynôme $2x^2 + 12x + 3$ est...	$2[(x + 3)^2 - 7,5]$	$2(x + 3)^2 - 15$	$(2x + 3)^2 - 15$	$2(x + 3)^2 - 9$
f est la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = -3(x + 1)^2 + 4$. Alors elle admet ...	-1 pour maximum en -4	-4 pour maximum en -1	4 pour maximum en 1	4 pour maximum en -1
L'équation $x^2 - 5x + 6 = 0$ a pour solutions...	6 et -1	-6 et 1	-2 et -3	2 et 3

Exercice 2 :

Résoudre dans $\mathbb{R}$ les équations suivantes :

(E1) : $2x^2 + 5x - 7 = 0$ (E2) : $x^2 + 6x + 5 = 0$ (E3) : $4x^2 + x + 5 = 0$ (E4) : $2x^2 - 20x + 50 = 0$

□ (E1) : $2x^2 + 5x - 7 = 0$

ici $a = 2$, $b = 5$ et $c = -7$, le discriminant $\Delta = b^2 - 4ac = 5^2 - 4 \times 2 \times (-7) = 81 > 0$,

donc l'équation possède deux solutions distinctes :

$$x_1 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-5 - 9}{2 \times 2} = -\frac{7}{2} = -3,5 \quad \text{et} \quad x_2 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-5 + 9}{2 \times 2} = 1$$

L'ensemble des solutions est $S = \{-3,5; 1\}$.

□ (E2) : $x^2 + 6x + 5 = 0$

Ici $a = 1$, $b = 6$ et $c = 5$, on calcule le discriminant $\Delta = b^2 - 4ac = 6^2 - 4 \times 1 \times 5 = 16 > 0$,

donc le trinôme possède deux solutions distinctes :

$$x_1 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-6 - 4}{2} = -5 \quad \text{et} \quad x_2 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-6 + 4}{2} = -1$$

L'ensemble des solutions est $S = \{-5; -1\}$.

□ (E3) : $4x^2 + x + 5 = 0$

ici $a = 4$, $b = 1$ et $c = 5$, le discriminant $\Delta = b^2 - 4ac = 1^2 - 4 \times 4 \times 5 = -79 < 0$,

donc l'équation ne possède pas de solutions réelles.

□ (E4) : $2x^2 - 20x + 50 = 0$

Ici $a = 2$, $b = -20$ et $c = 50$, on calcule le discriminant $\Delta = b^2 - 4ac = (-20)^2 - 4 \times 2 \times 50 = 0$.

donc l'équation possède une unique solution :

$$x_0 = -\frac{b}{2a} = -\frac{-(-20)}{2 \times 2} = 5$$

L'ensemble des solutions est $S = \{5\}$.

En utilisant la résolution des équations précédentes, déduire une factorisation de $A = 2x^2 + 5x - 7$ et de $D = 2x^2 - 20x + 50$

❖ Le trinôme $A = 2x^2 + 5x - 7$ a pour racines les nombres $-3,5$ et 1 .

Donc A peut se factoriser sous la forme $2(x + 3,5)(x - 1)$

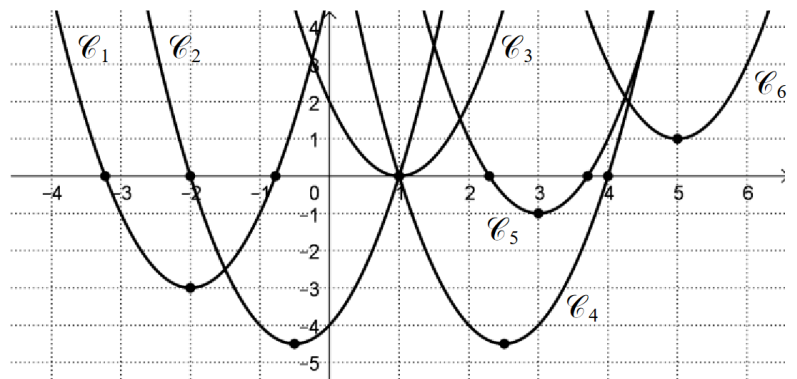
❖ Le trinôme $D = 2x^2 - 20x + 50$ a pour racine le nombre 5 .

Donc D peut se factoriser sous la forme $2(x - 5)^2$

Exercice 3 :

On donne ci-contre les courbes C_1, C_2, C_3, C_4, C_5 et C_6 représentations graphiques respectives de six fonctions polynômes P_1, P_2, P_3, P_4, P_5 et P_6 ayant toutes pour coefficient dominant $a = 2$.

Par simple lecture graphique, sans faire aucun calcul, déterminer l'expression de ces fonctions sous forme canonique ou factorisée, au choix.



Fonction	Forme canonique	Forme factorisée	Forme développée
P_1	$2(x + 2)^2 - 3$	$2(x + 3,25)(x + 0,75)$	$2x^2 + 8x + 5$
P_2	$2(x + 0,5)^2 - 4,5$	$2(x + 2)(x - 1)$	$2x^2 + 2x - 4$
P_3	$2(x - 1)^2$	$2(x - 1)^2$	$2x^2 - 4x + 2$
P_4	$2(x - 2,5)^2 - 4,5$	$2(x - 1)(x - 4)$	$2x^2 - 10x + 8$
P_5	$2(x - 3)^2 - 1$	$2(x - 2,25)(x - 3,75)$	$2x^2 - 12x + 17$
P_6	$2(x - 5)^2 + 1$	<i>Pas de factorisation</i>	$2x^2 - 20x + 51$

Exercice 4:

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = 4x^2 - 12x - 3$.

On note C la représentation graphique de f dans le plan muni d'un repère orthonormé.

- Étudier les variations de la fonction f et dresser son tableau de variation.
- Soit m un nombre réel. Déterminer selon les valeurs de m , le nombre de solutions de l'équation $f(x) = m$.
- Déterminer les coordonnées des points d'intersection de C avec l'axe des abscisses. On donnera les valeurs exactes.

f est une fonction polynôme du second degré de la forme $f(x) = ax^2 + bx + c$, avec $a = 4$, $b = -12$ et $c = -3$.

$$\alpha = -\frac{b}{2a} = \frac{-12}{2 \times 4} = \frac{3}{2}. \quad \beta = f(\alpha) = 4\left(\frac{3}{2}\right)^2 - 12 \times \frac{3}{2} - 3 = -12$$

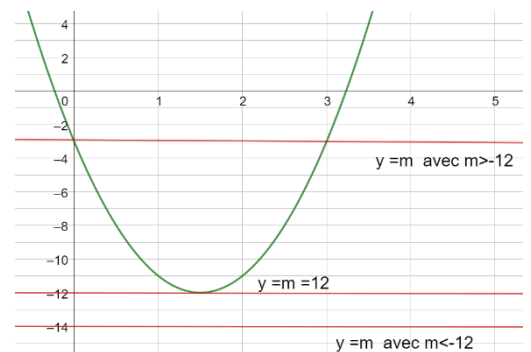
Puisque a est positif, f est décroissante sur $] -\infty; \frac{3}{2}]$ puis croissante sur $[\frac{3}{2}; +\infty[$,

On obtient donc le tableau de variation suivant :

x	$-\infty$	$\frac{3}{2}$	$+\infty$
f			

2. La fonction f admet un minimum de valeur -12 . Ainsi :

- si $m < -12$, l'équation $f(x) = m$ n'a pas de solution ;
- si $m = -12$, l'équation $f(x) = m$ a une unique solution $\frac{3}{2}$;
- si $m > -12$, l'équation $f(x) = m$ a deux solutions.



3. Les abscisses des points d'intersections de la courbe C avec l'axe des abscisses sont les solutions de l'équation $f(x) = 0$, c'est-à-dire $4x^2 - 12x - 3 = 0$

Son discriminant $\Delta = b^2 - 4ac = (-12)^2 - 4 \times 4 \times (-3) = 192 > 0$

donc l'équation possède deux solutions distinctes :

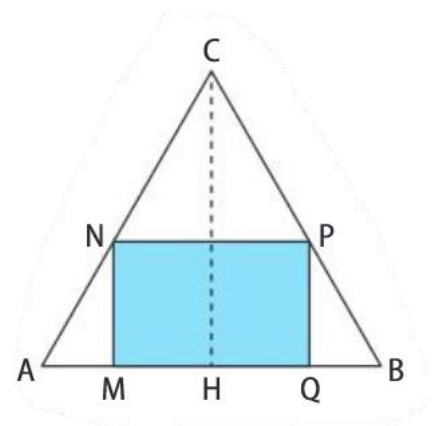
$$x_1 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-12 - 8\sqrt{3}}{8} = \frac{3}{2} + \sqrt{3} \quad \text{et} \quad x_2 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-12 + 8\sqrt{3}}{8} = \frac{3}{2} - \sqrt{3}$$

Les points cherchés ont pour coordonnées $(\frac{3}{2} + \sqrt{3}; 0)$ et $(\frac{3}{2} - \sqrt{3}; 0)$.

****Exercice 5 :**

Soit ABC un triangle équilatéral de côté 8. On inscrit dans ce triangle un rectangle $MNPQ$. On pose $AM = x$.

1. Quelles sont les valeurs de x possibles ?
2. Calculer CH , où H est le pied de la hauteur issue de C .
3. En déduire que $MN = x\sqrt{3}$.
4. Déterminer en justifiant, la valeur de x pour laquelle l'aire de $MNPQ$ est maximale.



1. M est un point du segment $[AH]$ distinct de A et de H donc $x \in]0 ; 4[$.

2. Le triangle AHC est rectangle en H donc d'après le théorème de Pythagore,

on a : $AC^2 = AH^2 + CH^2$ or $AH = 4$ et $AC = 8$ donc $8^2 = 4^2 + CH^2$

d'où $CH^2 = 8^2 - 4^2 = 48$ et on obtient $CH = \sqrt{48} = \sqrt{16 \times 3} = \sqrt{16} \times \sqrt{3} = 4\sqrt{3}$.

3. Dans le triangle AHC :

A, M et H sont alignés ; A, N et C sont alignés et les droites (NM) et (CH) sont parallèles car toutes les deux sont perpendiculaires à la droite (AH) .

On en déduit d'après le théorème de Thalès que $\frac{AM}{AH} = \frac{MN}{CH}$ soit $\frac{x}{4} = \frac{MN}{4\sqrt{3}}$.

On en déduit que $MN = x\sqrt{3}$.

4. L'aire du rectangle $MNPQ$ est égale à $MN \times MQ$

or $MN = x\sqrt{3}$ et $MQ = 2MH = 2(4 - x) = 8 - 2x$.

L'aire du rectangle MNPQ est donc égale à $x\sqrt{3} \times (8 - 2x) = -2\sqrt{3}x^2 + 8\sqrt{3}x$.

Soit f la fonction polynôme du second degré défini par $f(x) = -2\sqrt{3}x^2 + 8\sqrt{3}x$. Ici $a = -2\sqrt{3}$, $b = 8\sqrt{3}$

On calcule $\alpha = -\frac{b}{2a} = \frac{-8\sqrt{3}}{2 \times (-2\sqrt{3})} = 2$.

Le coefficient a est négatif donc f est croissante sur $[0 ; 2]$ et décroissante sur $[2 ; 4]$.

La fonction f admet donc un maximum pour $x = 2$. Il faut donc prendre $x = 2$ pour que l'aire de MNPQ soit maximale.