Questions flash 16 à 19 p 74

16 Louisa affirme : « La fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = (2x+1)^2 - 4x^2 + 6$ est une fonction polynôme du second degré car il y a des x^2. »
A-t-elle raison ?

17 Chaque expression est de la forme $ax^2 + bx + c$. Indiquer oralement les valeurs de a, b et c.

a) $\frac{3}{2}x^2 - x + 4$ **b)** $5 - 4x^2$

c) $3x - x^2$ **d)** $2x - 3 + x^2$

18 Laura affirme : « La fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = -2x(1+3x) + 4$ est un polynôme du second degré. »
Que peut-on en penser ?

19 f est la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x) = (2x-1)^2 - x^2$$

Reconnaître d'autres expressions de $f(x)$:

(1) $(x-1)(3x-1)$ **(2)** $3x^2 - 2x + 1$

(3) $3x^2 - 4x + 1$ **(4)** $(x+1)(2x-5)$

22 Développer et réduire chaque expression.
Préciser celles qui sont du second degré.

a) $\frac{1}{2}\left(x + \frac{1}{2}\right)^2 - \frac{1}{2}$ **b)** $x^2 - (x+1)^2$

c) $\left(x + \frac{2}{3}\right)\left(\frac{3}{2}x - 1\right)$ **d)** $\left(x + \frac{2}{5}\right)\left(x - \frac{2}{5}\right)$

Exercice résolu 2 p 71

f est la fonction polynôme du second degré définie par $f(x) = 4x^2 - 16x - 5$.

a) Déterminer la forme canonique de f.

b) En déduire que la fonction f admet un minimum.

Solution

a) Pour tout nombre réel x :

$$f(x) = 4\left(x^2 - 4x - \frac{5}{4}\right) = 4\left[(x-2)^2 - 2^2 - \frac{5}{4}\right]$$

La forme canonique de f est :

$$f(x) = 4\left[(x-2)^2 - \frac{21}{4}\right] = 4(x-2)^2 - 21$$

b) Pour tout nombre réel x, $4(x-2)^2 \geqslant 0$, donc $f(x) \geqslant -21$.

Le minimum de f est -21 ; il est atteint lorsque $x - 2 = 0$, c'est-à-dire en $x = 2$.

Pour déterminer la forme canonique de f :

- on met $a = 4$ en facteur,
- on utilise la méthode de complétion du carré en écrivant :

$$x^2 - 4x = \left(x - \frac{4}{2}\right)^2 - \left(\frac{4}{2}\right)^2$$

Exercice 4 p 71

4 g est la fonction polynôme du second degré définie par :

$$g(t) = -3t^2 - 6t + 18$$

a) Déterminer la forme canonique de g.

b) En déduire que la fonction g admet un maximum. Préciser pour quelle valeur de t il est atteint.

Exercice 36 p 75

36 f est la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x) = 4x^2 + 8x - 5$$

Recopier et compléter pour obtenir la forme canonique de f :

$$f(x) = 4\left(x^2 + \ldots x - \frac{\ldots}{\ldots}\right)$$

$$f(x) = 4\left[(x + \ldots)^2 - \ldots^2 - \frac{5}{4}\right]$$

$$f(x) = 4\left[(x + \ldots)^2 - \frac{\ldots}{\ldots}\right]$$

37 Dans chaque cas, déterminer la forme canonique de la fonction définie en utilisant la complétion du carré.

a) $f(x) = 2x^2 - 2x + 3$ **b)** $g(x) = 3x^2 + 6x + 12$

c) $h(t) = -5t^2 - 20t + 20$

27 f est la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x) = 2x(x+1) - x(x-4)$$

a) Factoriser $f(x)$.

b) Développer $f(x)$.

c) Utiliser la forme qui convient le mieux pour résoudre l'équation $f(x) = 0$.

90 Des biologistes étudient l'impact d'un bactéricide sur une culture de bactéries.
Ils estiment que le nombre de bactéries présentes dans la culture en fonction du temps t, en min, est donné par :

$$N(t) = -5t^2 + 50t + 1000$$

Quel est le nombre maximum de bactéries observables ?

91 On alimente un appareil électrique à l'aide d'un panneau solaire photovoltaïque faisant un angle α, en degré, avec l'horizontale.

La quantité d'énergie, en kWh, reçue annuellement par ce panneau est donnée par :

$$E(\alpha) = -0{,}2\alpha^2 + 12{,}8\alpha + 1800$$

avec $0 \leqslant \alpha \leqslant 90$.

Déterminer l'inclinaison qui permet de recevoir une quantité d'énergie maximum.

43 À Terrassa, en Catalogne, la Masia Freixa est une ancienne fabrique textile, remodelée par l'architecte Lluis Muncunill. On retrouve l'influence de Gaudi dans la profusion de formes paraboliques.

Dans le repère indiqué (*unité* : 1 m) on peut modéliser l'arche par la fonction définie sur $[0\,;11]$ par :

$$f(x) = 3x - 0{,}3x^2$$

a) Résoudre l'équation $f(x) = 0$ et en déduire la largeur, en m, de l'arche au sol.

b) Déterminer la forme canonique de f et en déduire la hauteur maximum, en m, de l'arche.

Exercice résolu 5 p 72 : Résoudre une équation du second degré

Résoudre dans $\mathbb{R}$ chaque équation.

a) $-\dfrac{1}{2}x^2 + 6x + 14 = 0$ **b)** $3x^2 - 9x + 15 = 0$ **c)** $2x^2 + 12x + 18 = 0$

Solution

a) Ici, $a = -\frac{1}{2}$, $b = 6$, $c = 14$. Donc :

$\Delta = 6^2 - 4 \times \left(-\frac{1}{2}\right) \times 14 = 64.$

$\Delta > 0$ donc l'équation a deux solutions distinctes :

$x_1 = \dfrac{-6 - \sqrt{64}}{2 \times \frac{-1}{2}} = 14$ et $x_2 = \dfrac{-6 + \sqrt{64}}{2 \times \frac{-1}{2}} = -2.$

L'ensemble des solutions est $\mathscr{S} = \{-2\,;14\}$.

b) Ici, $a = 3$, $b = -9$, $c = 15$. Donc : $\Delta = (-9)^2 - 4 \times 3 \times 15 = -99.$

$\Delta < 0$ donc l'équation n'a pas de solution ; on note $\mathscr{S} = \varnothing$.

c) Ici, $a = 2$, $b = 12$, $c = 18$. Donc : $\Delta = 12^2 - 4 \times 2 \times 18 = 0.$

L'équation a une unique solution : $x_0 = -\dfrac{12}{2 \times 2} = -3.$ L'ensemble des solutions est $\mathscr{S} = \{-3\}$.

> Pour résoudre une équation du second degré :
> – on calcule le discriminant Δ ;
> – on observe le signe de Δ ;
> – on applique la propriété énoncée au paragraphe **B** p. 69.

7 Dans chaque cas, calculer le discriminant et résoudre l'équation.

a) $-2x^2 + 11x - 12 = 0$ **b)** $x^2 + x + 1 = 0$

c) $0{,}25x^2 - 0{,}4x + 0{,}16 = 0$

41 Nassim a résolu l'équation $-2x^2 + 6x - 2 = 0$.
Il a obtenu les solutions :

$$x_1 = \frac{-6 - 2\sqrt{5}}{-4} \quad \text{et} \quad x_2 = \frac{-6 + 2\sqrt{5}}{-4}.$$

Jessica n'est pas d'accord, car elle a obtenu :

$$x_1 = \frac{3 - \sqrt{5}}{2} \quad \text{et} \quad x_2 = \frac{3 + \sqrt{5}}{2}.$$

Que peut-on en penser ?

42 **a)** Développer $(2 + \sqrt{3})^2$.

b) Résoudre l'équation suivante :

$$x^2 - (2 - \sqrt{3})x - 2\sqrt{3} = 0$$

Les solutions seront données sous forme simplifiée.

Exercice résolu 1 p 71 : Résoudre une équation du second degré en se ramenant à la forme factorisée

Résoudre dans $\mathbb{R}$ chaque équation du second degré.

a) $5x^2 - 16x = 0$ **b)** $4x^2 - 25 = 0$ **c)** $x^2 + 6x + 9 = 0$

Solution

a) $5x^2 - 16x = 0$ équivaut à $x(5x - 16) = 0$, c'est-à-dire $x = 0$ ou $5x - 16 = 0$. L'ensemble des solutions est $\mathcal{S} = \left\{0\,;\,\frac{16}{5}\right\}$.

b) $4x^2 - 25 = 0$ équivaut à $(2x + 5)(2x - 5) = 0$, c'est-à-dire $2x + 5 = 0$ ou $2x - 5 = 0$, soit $x = -\frac{5}{2}$ ou $x = \frac{5}{2}$.
L'ensemble de solutions est $\mathcal{S} = \left\{-\frac{5}{2}\,;\,\frac{5}{2}\right\}$.

c) $x^2 + 6x + 9 = 0$ équivaut à $(x + 3)^2 = 0$, c'est-à-dire $x + 3 = 0$. L'ensemble des solutions est $\mathcal{S} = \{-3\}$.

> Pour résoudre une équation du type $ax^2 + bx = 0$ (avec $a \neq 0$), on peut factoriser le membre de gauche.

> Pour résoudre une équation du type $ax^2 + c = 0$ (avec $a \neq 0$), on peut se ramener à une équation du type $x^2 = k$.

3 Résoudre dans $\mathbb{R}$ chaque équation du second degré sans utiliser le discriminant.

a) $-x^2 + 120 = 0$

b) $\frac{1}{4}x^2 + 3x + 9 = 0$

c) $3x^2 + 15x = 0$

d) $4x^2 - 4x + 1 = 0$

Exercice résolu 6 p 72

Repérer une racine évidente de l'équation $x^2 + 6x + 5 = 0$ puis terminer la résolution de cette équation.

Solution

-1 est une solution évidente de l'équation.

En effet, $(-1)^2+6\times(-1)+5=1-6+5=0$.

L'autre solution x' vérifie $-1\times x'=\dfrac{5}{1}=5$ et $x'=-5$.

L'ensemble des solutions est $\mathcal{S}=\{-1\,;-5\}$.

Lorsqu'une équation du second degré a une solution évidente, on peut utiliser le produit des racines pour obtenir l'autre solution.

9 Repérer une racine évidente de l'équation $2x^2+4x-6=0$ puis terminer la résolution.

25 *f* est la fonction polynôme du second degré définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x)=(x-7)(2x+4)$$

a) Écrire la forme développée de $f(x)$.

b) Wesley affirme : « La somme des racines de *f* est 5 et leur produit est -14. »

Procéder de deux façons différentes pour savoir si Wesley a raison.

49 **a)** Résoudre l'équation $-x^2-4x+5=0$.

b) En déduire une factorisation de $-x^2-4x+5$.

88 *f* est une fonction polynôme du second degré dont les racines sont -4 et 5.

De plus, on sait que $f(3)=8$.

Déterminer la forme développée de $f(x)$.

93 Guillaume possède un terrain rectangulaire ayant une superficie de 17 m^2.
Il a utilisé 17 m de grillage pour le clôturer.
Déterminer les dimensions, en m, du terrain de Guillaume. *Arrondir au dixième*.

45 On étudie une population de bactéries en fonction du temps t, en minute (avec $t \geqslant 0$).
Le nombre de bactéries est donné par :

$$N(t) = -\frac{4}{3}t^2 + 40t + 132$$

a) Vérifier que $N(t) = -\frac{4}{3}[(t-15)^2 - 324]$ et en déduire le nombre maximum de bactéries durant l'observation.

b) Résoudre l'équation $N(t) = 0$. En déduire l'instant auquel toutes les bactéries auront disparues.

82 Rechercher les points d'intersection de deux courbes

f et g sont les fonctions définies sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = 3x - 1$ et sur $\mathbb{R}^*$ par $g(x) = \frac{1}{x}$.

On note $\mathscr{C}_f$ et $\mathscr{C}_g$ les courbes représentatives respectives des fonctions f et g dans un repère.

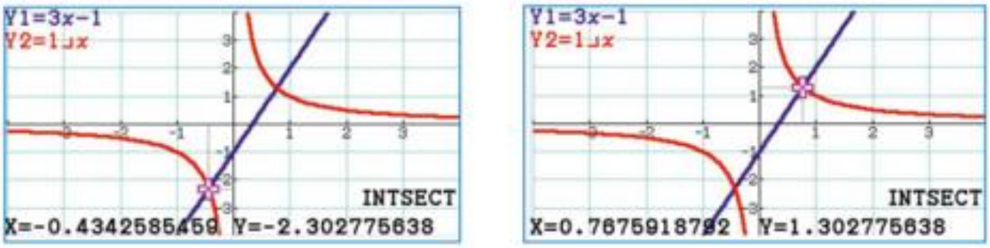
a) Avec la calculatrice, conjecturer le nombre de points d'intersection des courbes $\mathscr{C}_f$ et $\mathscr{C}_g$ et leurs abscisses.

b) Déterminer algébriquement les abscisses exactes des points d'intersections de $\mathscr{C}_f$ et $\mathscr{C}_g$.

Confronter à la conjecture émise à la question **a)**.

Solution

a) On conjecture que $\mathscr{C}_f$ et $\mathscr{C}_g$ ont deux points d'intersection d'abscisses x_1 et x_2 avec $x_1 \approx -0{,}43$ et $x_2 \approx 0{,}77$.



b) Les abscisses des points d'intersection de $\mathscr{C}_f$ et $\mathscr{C}_g$ sont les solutions de l'équation $f(x) = g(x)$ c'est-à-dire $3x - 1 = \frac{1}{x}$.

Dans $\mathbb{R}^*$, cette équation équivaut à $(3x-1)x = 1$, c'est-à-dire $3x^2 - x - 1 = 0$.

$\Delta = (-1)^2 - 4 \times 3 \times (-1) = 1 + 12 = 13$.

$\Delta > 0$ donc l'équation a deux solutions :

$$x_1 = \frac{1-\sqrt{13}}{6} \quad \text{et} \quad x_2 = \frac{1+\sqrt{13}}{6}.$$

Donc $\mathscr{C}_f$ et $\mathscr{C}_g$ ont deux points d'intersection d'abscisses x_1 et x_2.

On peut vérifier qu'effectivement $x_1 \approx -0{,}43$ et $x_2 \approx 0{,}77$.

83 f et g sont les fonctions définies sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x) = \frac{1}{2}x - \frac{3}{4}$$

et sur $\mathbb{R}^*$ par $$g(x) = \frac{1}{x}.$$

On note $\mathscr{C}_f$ et $\mathscr{C}_g$ les courbes représentatives respectives des fonctions f et g dans un repère.

a) Avec la calculatrice, conjecturer le nombre de points d'intersection des courbes $\mathscr{C}_f$ et $\mathscr{C}_g$ et leurs abscisses.

b) Déterminer algébriquement les valeurs exactes des abscisses des points d'intersection de $\mathscr{C}_f$ et $\mathscr{C}_g$.

Confronter à la conjecture émise au **a)**.

102 Le plan est muni d'un repère orthonormé d'origine O.

d est la droite d'équation $y = 2x + 4$.

M$(x\,;y)$ est un point de cette droite.

Déterminer les coordonnées des points M tels que la distance OM soit égale à $\sqrt{5}$.

94 Pour résoudre une équation bicarrée, c'est-à-dire de la forme $ax^4 + bx^2 + c = 0$ (avec $a \neq 0$), on résout le système $\begin{cases} X = x^2 \\ aX^2 + bX + c = 0 \end{cases}$.

Résoudre chaque équation.

a) $x^4 - 3x^2 = 0$

b) $-\frac{1}{6}x^4 + 3x^2 - 13{,}5 = 0$

c) $3x^4 + 9x^2 - 12 = 0$

d) $2x^4 + 40x^2 + 128 = 0$

Exercice résolu 79 p 80 : Algorithmie

Voici un algorithme de résolution de l'équation :

$$ax^2 + bx + c = 0 \text{ avec } a \neq 0.$$

1. Compléter cet algorithme.

2. Coder cet algorithme en langage Python. Saisir ce programme.

3. Résoudre chacune des équations suivantes algébriquement et avec le programme. Comparer les solutions obtenues avec les deux méthodes.

a) $4x^2 + 8x - 5 = 0$

b) $-3x^2 - x + 2 = 0$

Saisir a, b, c
$d \leftarrow b^2 - 4ac$
Afficher d
Si $d > 0$ alors
  $x \leftarrow \boxed{\quad\quad}$
  $y \leftarrow \boxed{\quad\quad}$
  Afficher x, y
Fin Si
Si $d = 0$ alors
  $x \leftarrow \boxed{\quad\quad}$
  Afficher x
Fin Si
Si $\boxed{\quad\quad}$ alors
  Afficher "Pas de solution"
Fin Si

Exercice 80 p 80

80 Résoudre chaque équation algébriquement puis avec le programme de l'exercice **79**.

a) $9x^2 - 24x + 16 = 0$

b) $0{,}5x^2 + 3{,}4x + 1 = 0$

Exercice 81 p 80

81 f est une fonction $x \mapsto ax^2 + bx + c$ avec $a \neq 0$. Sa forme canonique est $f(x) = a(x - \alpha)^2 + \beta$. Écrire un programme qui affiche α, β lorsqu'on saisit a, b, c en entrée. Tester ce programme.