

Mathématiques 1 ^{ère} EDS	Chapitre 2 : Les Probabilités conditionnelles et indépendance	Probabilité
---------------------------------------	---	-------------

I – Rappels sur les probabilités :

a) Généralités :

□ Définition et propriétés

L'ensemble de toutes les **issues** (ou **éventualités**) possibles d'une expérience aléatoire s'appelle l'**univers** de cette expérience aléatoire (souvent noté Ω).

Un sous-ensemble de cet univers s'appelle un **événement**.

Une probabilité est toujours un nombre compris **entre 0 et 1**.

Dans le cas où toutes les issues sont **équiprobables** (c'est-à-dire qu'elles ont toutes les mêmes chances de se produire), la **probabilité** d'un événement est le quotient :

$$p(A) = \frac{\text{nombre de cas favorables à } A}{\text{nombre de cas possibles dans l'univers}}$$

b) Événements, calculs de probabilités

□ Définition et propriétés

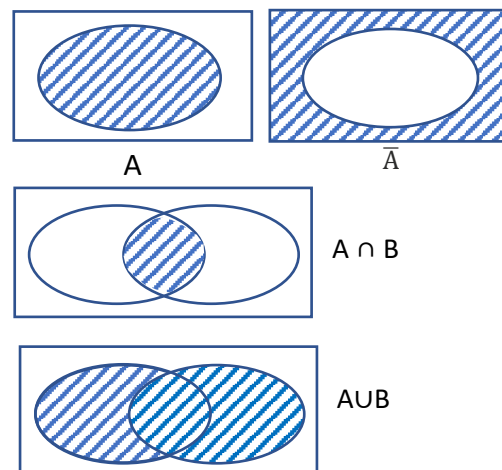
✧ L'événement **contraire** (ou complémentaire) $\bar{A}$ d'un événement A se réalise dès que A ne se réalise pas :

✧ L'**intersection** $A \cap B$ (lire « A inter B ») de deux événements est l'événement qui se réalise lorsque A **ET** B se réalisent *simultanément*.

✧ La **réunion** $A \cup B$ (lire « A union B ») de deux événements est l'événement qui se réalise lorsque l'un *au moins* des deux événements se réalise (l'un **OU** l'autre **OU** les deux).

✧ Pour tout événement A et B, $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$.

✧ Pour tout événement A, $P(\bar{A}) = 1 - P(A)$



❖ Exemple :

Un laboratoire pharmaceutique a réalisé des tests sur 800 patients atteints d'une maladie. Certains sont traités avec le médicament A, d'autres avec le médicament B. Le tableau ci-dessous présente les résultats de l'étude :

	Médicament A	Médicament B	Total
Guéri	383	291	674
Non Guéri	72	54	126
Total	455	345	800

On choisit au hasard un patient testé, et on appelle A l'événement « le patient a été traité avec le médicament A » et G : « il est guéri ».

- $\bar{A}$ est l'événement : « le patient a été traité avec le médicament B »;
- $A \cap G$ est l'événement : « le patient a été traité avec le médicament A **et** est guéri »;
- $A \cup G$ est l'événement : « le patient a été traité avec le médicament A **ou** est guéri ».

On a, de plus :

- $p(\bar{A}) = 1 - p(A) = 1 - \frac{455}{800} = \frac{345}{800}$;
- $p(A \cap G) = \frac{383}{800}$;
- $p(A \cup G) = p(A) + p(G) - p(A \cap G) = \frac{455}{800} + \frac{674}{800} - \frac{383}{800} = \frac{746}{800}$.

c) Tableau à double entrée

	A	$\bar{A}$	Total
B	$P(A \cap B)$	$P(\bar{A} \cap B)$	$P(B)$
$\bar{B}$	$P(A \cap \bar{B})$	$P(\bar{A} \cap \bar{B})$	$P(\bar{B})$
Total	$P(A)$	$P(\bar{A})$	1

Principe : Un tableau à double entrée permet de déterminer des probabilités conditionnelles

- La probabilité de l'évènement $A \cap B$ se situe à l'intersection de la ligne A et de la colonne B
- La dernière ligne et la dernière colonne du tableau contiennent les probabilités de chaque évènement : A, $\bar{A}$...
- $P_B(A)$ est alors le quotient des valeurs de $P(A \cap B)$ et de $P(B)$ lues dans le tableau.

II – Arbre pondéré, probabilité conditionnelle :

a) Utilisation d'un arbre pondéré :

□ Définition

Un **arbre pondéré** est un arbre de choix dans lequel les **branches** n'ont pas toutes le même poids. Chacune des branches (primaire ou secondaire) est alors affectée d'un nombre précisant la **probabilité** de passer par ce chemin plutôt qu'un autre.

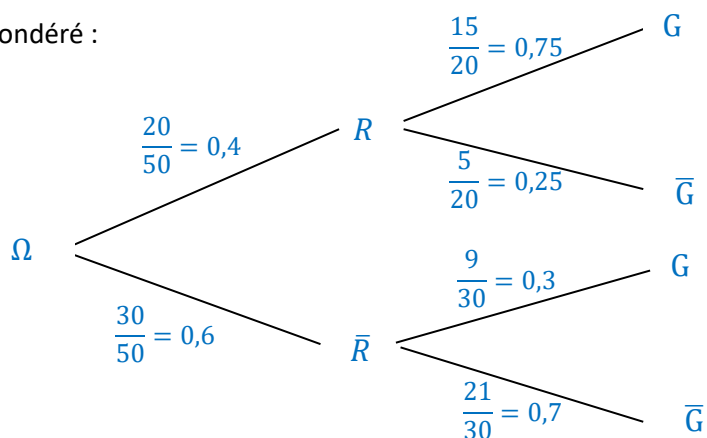
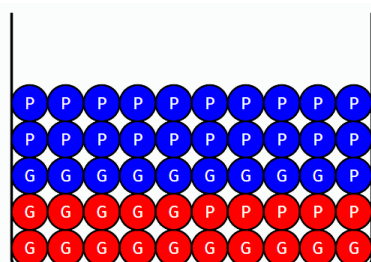
À la **racine** de l'arbre, on trouve toujours l'univers de l'expérience aléatoire, et à chaque **noeud** ou **feuille**, un Évènement.

❖ Exemple :

Un sac contient 20 boules rouges et 30 boules bleues. Chacune d'entre elles porte l'une des mentions « Gagné » ou « Perdu ». 15 boules rouges et 9 boules bleues sont gagnantes.

On tire au hasard une boule dans le sac, et on appelle R l'évènement « La boule tirée est rouge » et G « La boule tirée est gagnante ».

Schématiser l'expérience par un arbre pondéré :



□ Théorèmes

- La somme des probabilités de toutes les branches partant d'un même noeud est toujours égale à 1.
- La probabilité d'un chemin est égale au produit des probabilités de toutes les branches qui le composent.
- La probabilité d'un évènement est la somme des probabilités de tous les chemins qui mènent à cet évènement.

La probabilité d'obtenir une boule rouge gagnante est : $\frac{15}{50} = \frac{3}{10} = p(R \cap G)$.

Sur l'arbre, on retrouve bien $0,4 \times 0,75 = 0,3$.

La probabilité d'obtenir une boule gagnante est : $\frac{15+9}{50} = 0,48$

Sur l'arbre, il y a deux chemins qui mènent à G : le chemin $R \cap G$, de probabilité 0,3 et le chemin $\bar{R} \cap G$ de probabilité $0,6 \times 0,3 = 0,18$. On retrouve bien $p(R \cap G) + p(\bar{R} \cap G) = 0,3 + 0,18 = 0,48 = p(G)$.

b) Probabilité conditionnelle :

□ Définition

Lorsqu'on construit un arbre pondéré comme ci-dessus, les probabilités inscrites sur les branches primaires sont des probabilités classiques, mais les probabilités inscrites sur les branches secondaires sont des **probabilités conditionnelles** : ce sont les probabilités d'arriver à ce nœud *sachant que l'on vient de tel autre nœud*.

La probabilité conditionnelle que l'événement B se réalise sachant que l'événement A est réalisé se note $P_A(B)$ (lire « probabilité de B sachant A ») et, si $p(A) \neq 0$:

$$P_A(B) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)}$$

Remarques :

- Si $p(B) \neq 0$, on peut inverser les rôles de A et B dans la formule ci-dessus : $P_B(A) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}$.
- Si les probabilités conditionnelles du type $p_A(B)$ sont en général données dans les énoncés, il arrive souvent qu'on doive inverser les conditions et calculer par exemple $p_B(A)$. C'est là que la formule est nécessaire.

❖ Exemple :

$p_R(G) = 0,75$ est la probabilité de tirer une boule gagnante sachant qu'elle est rouge, autrement dit, la probabilité de tirer une boule rouge gagnante parmi les rouges. Cette probabilité découle de la constitution de l'urne.

$p_G(R)$ ne figure pas dans l'arbre. C'est la probabilité d'avoir tiré une boule rouge sachant qu'elle est marquée gagnante, autrement dit la probabilité de tirer une boule rouge gagnante parmi les boules gagnantes. C'est moins naturel dans ce sens, puisqu'on voit la couleur de la boule avant d'y trouver la marque.

$$P_G(R) = \frac{P(G \cap R)}{P(G)} = \frac{0,3}{0,48} = 0,625.$$

On peut tout de même retrouver cette probabilité grâce à la constitution de l'urne : **sur les 15 + 9 = 24 boules gagnantes, il y en a 15 rouges et $\frac{15}{24} = 0,625$.**

❖ Exercice :

Parmi les élèves d'une classe, 70 % pratiquent un sport, 40 % pratiquent une autre activité et 10 % pratiquent les deux. On choisit au hasard un élève de la classe et on considère les événements S : « l'élève choisi pratique le sport » et A : « l'élève choisi pratique une autre activité ». On peut écrire $P(S) = 0,7$, $P(A) = 0,4$ et $P(A \cap S) = 0,1$. La probabilité qu'un élève pratique un sport sachant qu'il pratique une autre activité est :

$$P_A(S) = \frac{P(A \cap S)}{P(A)} = \frac{0,1}{0,4} = 0,25$$

La probabilité qu'un élève pratique une autre activité sachant qu'il pratique un sport est :

$$P_S(A) = \frac{P(A \cap S)}{P(S)} = \frac{0,1}{0,7} = \frac{1}{7}$$

□ Propriétés

$$P(A \cap B) = P_A(B) \times P(A)$$

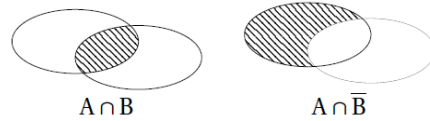
$$P_A(\bar{B}) = 1 - P_A(B)$$

❖ Démonstration :

- C'est la formule que l'on utilise quand on dit que la probabilité d'un chemin est le produit de celles des branches qui le composent :

$$P_A(B) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)} \Leftrightarrow P(A \cap B) = P_A(B) \times P(A)$$

- C'est la formule que l'on utilise quand on dit que la somme des probabilités des branches issues d'un même nœud est toujours égale à 1 :



En effet, la réunion de $A \cap B$ et $A \cap \bar{B}$ est égale à A donc $p_A(\bar{B}) + p_A(B) = \frac{P(A \cap \bar{B})}{P(A)} + \frac{P(A \cap B)}{P(A)} = \frac{P(A)}{P(A)} = 1$

❖ Exercice :

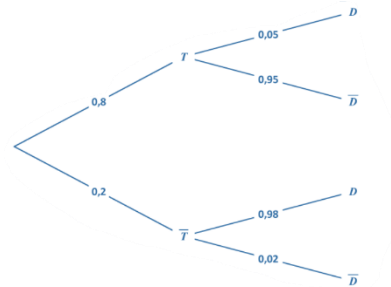
Tous les élèves de terminale d'un lycée ont passé un test de certification en anglais.

- 80 % ont réussi le test ;
- Parmi ceux qui ont réussi le test, 95 % n'ont jamais redoublé ;
- Parmi ceux qui ont échoué au test, 2 % n'ont jamais redoublé.

On considère les événements T : « l'élève a réussi le test » et D : « l'élève a déjà redoublé »

Calculer la probabilité de $T \cap \bar{D}$ « l'élève a réussi le test et n'a jamais redoublé » .

$$P(T \cap \bar{D}) = P_T(\bar{D}) \times P(T) = 0,95 \times 0,8 = 0,76.$$



III – Formule des probabilités totales :

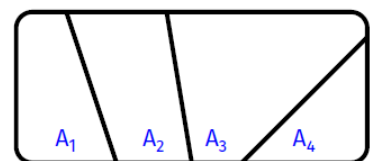
a) Partition de l'univers :

☐ Définition : Partition de l'univers

Soient $A_1, A_2, \dots, A_n$ une liste d'événements relatifs à une même expérience aléatoire.

On dit que ces événements réalisent une **partition** de l'univers si :

- aucun de ces éléments n'est vide;
- ils sont deux à deux disjoints (c'est-à-dire d'intersection vide);
- la réunion de tous ces événements recouvre l'univers tout entier.



Remarque : En particulier, un événement A et son événement contraire $\bar{A}$ forment une partition de Ω .

b) Probabilités totales

☐ Théorème : Formule des probabilités totales

Si $A_1, A_2, \dots, A_n$ réalisent une partition de l'univers, alors pour tout événement B :

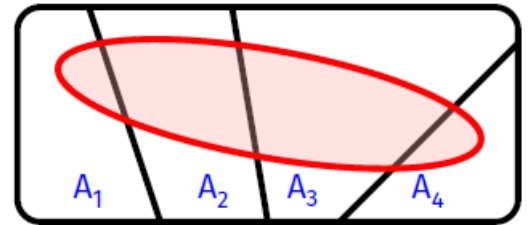
$$P(B) = p(A_1 \cap B) + p(A_2 \cap B) + \dots + p(A_n \cap B)$$

En particulier, pour tous événements A et B :

$$P(B) = p(A \cap B) + p(\bar{A} \cap B)$$

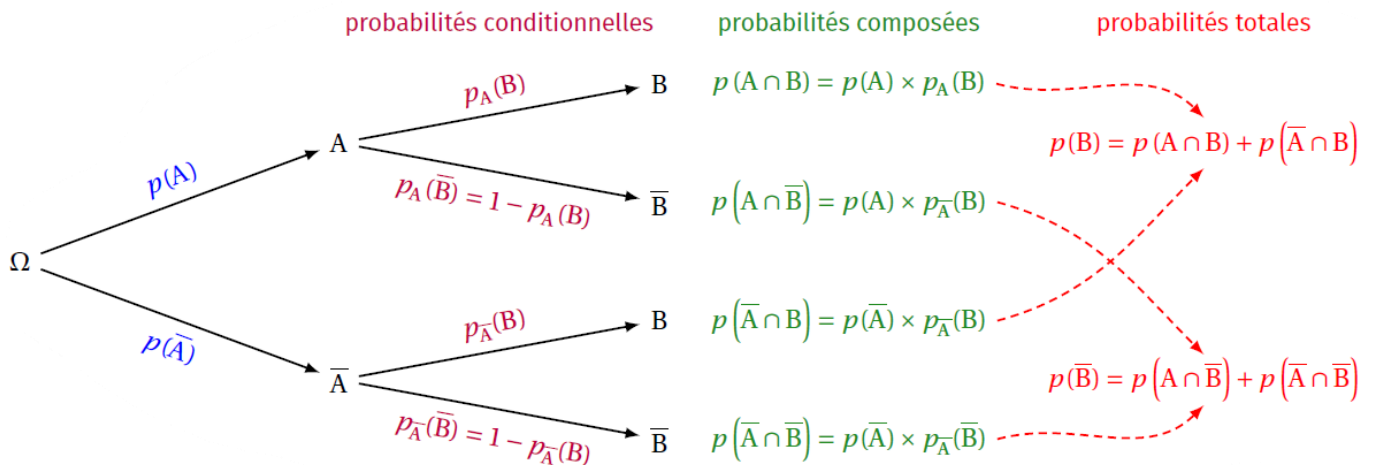
❖ Démonstration :

C'est la propriété qu'on utilise quand on dit que la probabilité d'un événement est la somme de toutes les probabilités des chemins qui mènent à cet événement. Elle vient du fait que les événements $A_1 \cap B, A_2 \cap B, \dots, A_n \cap B$ sont deux à deux disjoints et recouvrent entièrement B .



EN RESUME

Sur un arbre, on peut visualiser et représenter différentes probabilités mises en jeu :



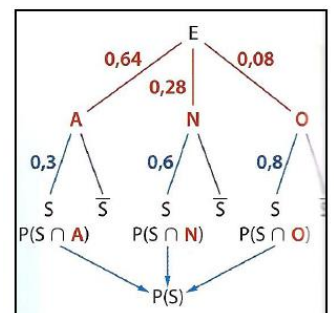
❖ Exercice :

Un magasin de sport propose des réductions sur les tris marques de vêtements qu'il distribue. La marque A représente 64 % des vêtements vendus ; la marque N , 28 % ; la marque O en représente 8 %. 30 % des vêtements de la marque A , 60 % de ceux de la marque N et 80 % de ceux de la marque O sont soldés. On interroge un client ayant acheté un vêtement de sport.

Puisque A, N et O forment une partition de l'univers des vêtements de sport, d'après la formule des probabilités totales, on a :

$$P(S) = P(A \cap S) + P(N \cap S) + P(O \cap S) = P_A(S) \times P(A) + P_N(S) \times P(N) + P_O(S) \times P(O) \\ = 0,30 \times 0,64 + 0,60 \times 0,28 + 0,80 \times 0,08 = 0,424$$

Ainsi la probabilité qu'un client achète un vêtement de sport soldé est égale à 0,424.



IV – Indépendance :

a) Indépendance de deux événements

☐ Définition :

On dit que deux événements A et B de probabilité non nulle sont **indépendants** lorsque $P(A \cap B) = P(A) \times P(B)$.

On a également :

A et B sont indépendants, si et seulement si, $P_A(B) = P(B)$ ou $P_B(A) = P(A)$.

❖ **Exemple :**

On tire une carte au hasard dans un jeu de 32 cartes.

Soit R l'événement "On tire un roi".

Soit T l'événement "On tire un trèfle".

Alors $R \cap T$ est l'événement "On tire le roi de trèfle".

On a : $P(R) = \frac{4}{32} = \frac{1}{8}$, $P(T) = \frac{8}{32} = \frac{1}{4}$ et $P(R \cap T) = \frac{1}{32}$

Donc $P(R) \times P(T) = \frac{1}{8} \times \frac{1}{4} = \frac{1}{32} = P(R \cap T)$

Les événements R et T sont donc indépendants.

Ainsi, par exemple, $P_T(R) = P(R)$.

Ce qui se traduit par la probabilité de tirer un roi parmi les trèfles et égale à la probabilité de tirer un roi parmi toutes les cartes.

Contre-exemple :

On reprend l'expérience précédente en ajoutant deux jokers au jeu de cartes.

Ainsi :

$P(R) = \frac{4}{34} = \frac{2}{17}$, $P(T) = \frac{8}{34} = \frac{4}{17}$ et $P(R \cap T) = \frac{1}{34}$

Donc $P(R) \times P(T) = \frac{2}{17} \times \frac{4}{17} = \frac{8}{289} \neq P(R \cap T)$

Les événements R et T ne sont donc pas indépendants.

□ Propriété

Si A et B sont indépendants alors $\bar{A}$ et B sont indépendants.

❖ Démonstration :

$$\begin{aligned} P(\bar{A} \cap B) &= P(B \cap \bar{A}) \\ &= P(B) \times P_B(\bar{A}) \\ &= P(B) \times (1 - P_B(A)) \\ &= P(B) \times (1 - P(A)) \text{ car } A \text{ et } B \text{ sont indépendants} \\ &= P(B) \times P(\bar{A}) \end{aligned}$$

Donc $\bar{A}$ et B sont indépendants.

b) Succession de deux épreuves indépendantes

□ Définition :

On appelle succession de deux épreuves indépendantes la répétition à l'identique d'une expérience aléatoire deux fois, les résultats de la première épreuve n'influençant pas ceux de la seconde.

Remarque :

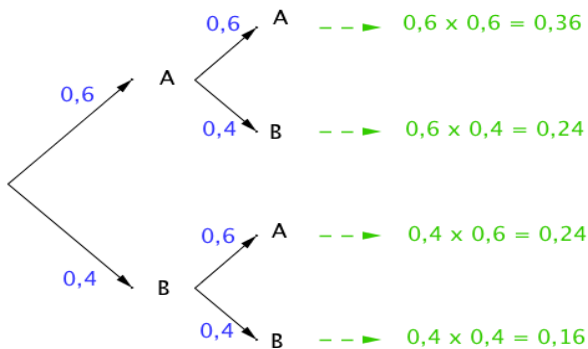
- Lors de la succession de deux épreuves indépendantes, les probabilités de chaque issue ne changent pas.
- On peut assimiler une succession de deux épreuves indépendantes à deux tirages successifs avec remise. En effet, lors de deux tirages successifs avec remise, les résultats du premier tirage n'influencent pas ceux obtenus au second tirage.
- Pour représenter une succession de deux épreuves indépendantes, on peut utiliser un arbre pondéré à deux niveaux. Les événements et leurs probabilités restent les mêmes entre le premier niveau et le deuxième niveau de l'arbre.

❖ Exemple :

On considère l'expérience suivante :

Une urne contient 3 boules blanches et 2 boules rouges. On tire au hasard une boule et on la remet dans l'urne. On répète l'expérience deux fois de suite.

- 1) Représenter l'ensemble des issues de ces expériences dans un arbre.
- 2) Déterminer la probabilité :
 - a) d'obtenir deux boules blanches
 - b) une boule blanche et une boule rouge
 - c) au moins une boule blanche.



a) Obtenir deux boules blanches correspond à l'issue (A ; A) : $P_1 = 0,36$ (d'après l'arbre).

b) Obtenir une boule blanche et une boule rouge correspond aux issues (A ; B) et (B ; A) :
 $P_2 = 0,24 + 0,24 = 0,48$.

c) Obtenir au moins une boule blanche correspond aux issues (A ; B), (A ; A) et (B ; A) :
 $P_2 = 0,24 + 0,36 + 0,24 = 0,84$.

Remarques :

- Pour une expérience dont le nombre d'issues est supérieur à 2, le principe reste le même.
- Pour une expérience dont le nombre de répétition est supérieur à 2, le principe reste le même.

V – Complément sur les événements incompatibles :

Définition :

Deux évènements sont dits **incompatibles** s'ils ne peuvent pas se produire simultanément. Autrement dit, deux évènements sont incompatibles s'ils ne contiennent pas d'issue commune.

❖ Exemple :

On lance un dé à six faces. On considère les évènements suivants :

- A : « obtenir un multiple de 3 »
- B : « obtenir 4 ou 5 »
- A et B sont deux évènements incompatibles car ils ne peuvent pas être réalisés simultanément.

Propriété : Probabilité de la réunion de deux évènements incompatibles

Soient A et B deux évènements incompatibles :

$$P(A \cup B) = P(A) + p(B)$$

