Mathématiques 1ère EDS	Devoir en Temps Libre n°3	Correction

Exercice 1 :

QCM, dans chaque cas donner la (ou les) réponse(s) exacte(s) sans justifier

Question		a	b	c	d
1	Soient A et B deux événements tels que $P(A) = 0{,}7$ et $P_A(\overline{B}) = 0{,}2$. Quelle est la valeur de $P(A \cap \overline{B})$	0,14	0,56	0,9	2
2	Soit A et B des événements indépendants alors :	$P(A) = P(B)$	$P(A \cap B) = P(A) \times P(B)$	$P(A \cap B) = 0$	$P_B(A) = P(A)$
3	On prélève au hasard la fiche d'une personne interrogée dont les réponses sont données ci-dessous. Alors ...	$P(S) = 0{,}7$	$P(\overline{F}) = 0{,}44$	$P(S \cup F) = \frac{21}{25}$	$P(H \cup \overline{S}) = \frac{4}{25}$
4	(tableau ci-dessous)	$P_S(F) = 0{,}6$	$P_F(S) = 0{,}75$	$P_H(\overline{S}) = \frac{4}{11}$	$P_{\overline{S}}(H) = \frac{4}{11}$

	Sportif (S)	Non sportif ($\overline{S}$)	total
Femme (F)	21	7	28
Homme ($H = \overline{F}$)	14	8	22
total	35	15	50

Question 3 :

$P(S) = \frac{35}{50} = 0{,}7$; $P(\overline{F}) = \frac{22}{50} = 0{,}44$; $P(\overline{F}) = \frac{22}{50} = 0{,}44$; $P(S \cup F) = P(S) + P(F) - P(S \cap F) = \frac{35}{50} + \frac{28}{50} - \frac{21}{50} = \frac{21}{25}$

$P(H \cup \overline{S}) = P(H) + P(\overline{S}) - P(H \cap \overline{S}) = \frac{22}{50} + \frac{15}{50} - \frac{8}{50} = \frac{21}{25} \neq \frac{4}{25}$

Question 4 :

$P_S(F) = \frac{21}{35} = 0{,}6$; $P_F(S) = \frac{21}{28} = 0{,}75$; $P_H(\overline{S}) = \frac{8}{22} = \frac{4}{11}$; $P_{\overline{S}}(H) = \frac{8}{15} \neq \frac{4}{11}$

Exercice 2 :

Résoudre dans $\mathbb{R}$ les équations suivantes :

☐ (E1) : $x^2 + 2x - 3 = 0$

On a $\Delta = 2^2 - 4 \times 1 \times (-3) = 16$. $\Delta > 0$, donc l'équation possède deux solutions distinctes :

$x_1 = \frac{-2-\sqrt{16}}{2\times1} = -3$ et $x_2 = \frac{-2+\sqrt{16}}{2\times1} = 1$

L'ensemble des solutions est donc $S = \{-3; 1\}$.

☐ (E2) : $9x^2 + 24x + 16 = 0$

On reconnaît une identité remarquable. Le calcul du discriminant est donc inutile.

$9x^2 + 24x + 16 = 0 \Leftrightarrow (3x+4)^2 = 0 \Leftrightarrow 3x + 4 = 0 \Leftrightarrow x = -\frac{4}{3}$

L'ensemble des solutions est donc $S = \left\{-\frac{4}{3}\right\}$.

☐ (E3) : $2x^2 - 2x - 3 = 0$

On a $\Delta = (-2)^2 - 4 \times 2 \times (-3) = 28$. $\Delta > 0$, donc l'équation possède deux solutions distinctes :

$x_1 = \frac{2-\sqrt{28}}{2\times2} = \frac{1-\sqrt{7}}{2}$ et $x_2 = \frac{2-\sqrt{28}}{2\times2} = \frac{1+\sqrt{7}}{2}$

L'ensemble des solutions est donc $S = \left\{\frac{1-\sqrt{7}}{2} ; \frac{1+\sqrt{7}}{2}\right\}$.

En utilisant la résolution des équations précédentes, déduire une factorisation de $A = 9x^2 + 24x + 16$ et de $B = 2x^2 - 2x - 3$.

- Le trinôme $A = 9x^2 + 24x + 16$a pour racine le nombre $-\frac{4}{3}$.

Donc A peut se factoriser sous la forme $-9\left(x + \frac{4}{3}\right)^2$

- Le trinôme $B = 2x^2 - 2x - 3$ a pour racines les nombres $\frac{1-\sqrt{7}}{2} ; \frac{1+\sqrt{7}}{2}$.

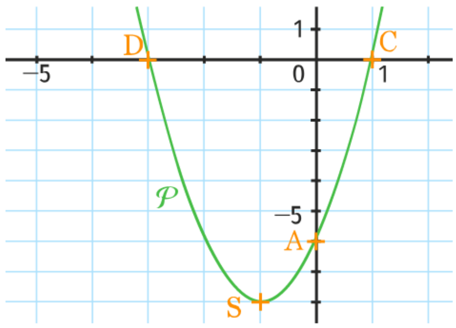
Donc D peut se factoriser sous la forme $2(x - \frac{1-\sqrt{7}}{2})(x - \frac{1+\sqrt{7}}{2})$

Exercice 3 :

1) On a tracé ci-dessous la représentation graphique d'une fonction polynôme du second degré f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = ax^2 + bx + c$.

1. Donner le signe du discriminant du trinôme. Justifier.

La courbe représentative de la fonction f coupe l'axe des abscisses en deux points distincts, le trinôme a donc deux racines distinctes, par conséquent son discriminant strictement **positif**.



2. Déterminer graphiquement une forme canonique de f (en fonction de a).

Le sommet de la parabole S pour coordonnées $(-1 ; -8)$ *donc* $\alpha = -1$ *et* β *= -8*

Donc la forme canonique de f *est :* $a(x+1)^2 - 8$

3. Déterminer graphiquement une forme factorisée de f (en fonction de a).

La parabole coupe l'axe des abscisses aux points d'abscisses −3 et 1.

Donc la forme factorisée de f est *:* $a(x+3)(x-1)$.

4. A l'aide d'une des deux expressions précédentes et d'un point de la courbe déterminer a.

Pour déterminer a , on prend par exemple le point de coordonnée A(0 ;−6).

Pour $x = 0$, on obtient $a(x+3)(x-1) = a \times 3 \times (-1) = -3a = -6$ *d'où* $a = 2$

5. En déduire les formes canoniques, et factorisée de la fonction, vérifier par le calcul que ces deux expressions sont égales, en déduire la forme développée de la fonction.

On connait maintenant la valeur de $a = 2$, on peut donc écrire les formes du trinôme complète

La forme canonique de f est *:* $f(x) = 2(x+1)^2 - 8 = 2(x^2 + 2x + 1) - 8 = 2x^2 + 4x + 2 - 8 = 2x^2 + 4x - 6$.

La forme factorisée est $f(x) = 2(x+3)(x-1) = 2(x^2 - x + 3x - 3) = 2x^2 - 2x + 6x - 6 = 2x^2 + 4x - 6$.

La forme développée de la fonction est donc $f(x) = 2x^2 + 4x - 6$

Exercice 4:

Dans une ville, 80% des logements sont des appartements, occupés à 45% par une seule personne et à 55% par plusieurs personnes. Le reste des logements sont des maisons.

Quand on prend au hasard un logement dans cette ville, on considère les événements suivants :

- A : « le logement est un appartement ».
- S : « le logement est occupé par une seule personne ».

1) a) Déterminer $\mathrm{p}(A)$ et $\mathrm{p}_{\mathrm{A}}(\mathrm{S})$ en utilisant les données de l'énoncé.

La probabilité que le logement soit un appartement est $p(A) = \frac{80}{100} = 0{,}8$.

La probabilité que le logement soit occupé par une personne seule sachant que c'est un appartement est

$p_A(S) = \frac{45}{100} = 0{,}45$.

b) En déduire la probabilité que le logement soit un appartement occupé par une seule personne.

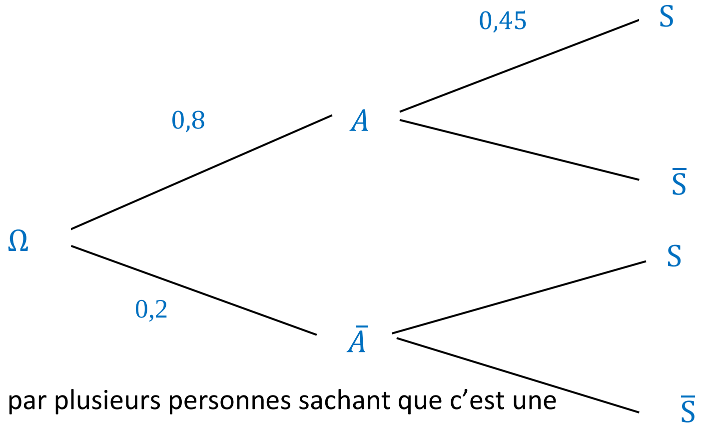
$p(A \cap S) = p(A) \times p_A(S) = 0{,}8 \times 0{,}45 = 0{,}36$

La probabilité que le logement soit un appartement occupé par une seule personne est de 0,36.

2) Par ailleurs, 17% des logements de cette ville sont des maisons occupées par plusieurs personnes.

a) Traduire cette information en une probabilité en utilisant les événements et $\bar{A}$ et $\bar{S}$.

$p(\bar{A} \cap \bar{S}) = 0{,}17$



b) Déterminer $p(\bar{A})$ en utilisant l'énoncé.

$p(\bar{A}) = 1 - p(A) = 1 - 0{,}8 = 0{,}2$

c) En déduire la probabilité que le logement soit occupé par plusieurs personnes sachant que c'est une maison.

$p_{\bar{A}}(\bar{S}) = \frac{p(\bar{A} \cap \bar{S})}{p(\bar{A})} = \frac{0{,}17}{0{,}2} = 0{,}85$

La probabilité que le logement soit une maison occupée par plusieurs personnes est de 0,85.

Exercice 5 :

Le tableau ci-dessous, donne la répartition de 100 élèves de Terminale d'un lycée, sportifs ou non sportifs, en fonction de leur régime scolaire (externe, interne ou demi-pensionnaire).

	Externe	Demi-P	Interne
Sportif	22	12	6
Non sportif	30	18	12

On choisit un élève au hasard.

1. Les événements « l'élève est sportif » et « l'élève est externe » sont-ils indépendants ?

On note S l'événement « l'élève est sportif » et E l'événement « l'élève est externe ».

On a $p(S \cap E) = \frac{22}{100} = \frac{11}{50}$ et $p(S) \times p(E) = \frac{40}{100} \times \frac{52}{100} = \frac{26}{50}$ donc $p(S \cap E) \neq p(S) \times p(E)$,

donc les événements S et E ne sont pas indépendants.

2. Les événements « l'élève est non sportif » et « l'élève est demi-pensionnaire » sont-ils indépendants ?

On note $\bar{S}$ l'événement « l'élève est non sportif » et D l'événement « l'élève est demi-pensionnaire ».

On a $p(\bar{S} \cap D) = \frac{18}{100}$ et $p(\bar{S}) \times p(D) = \frac{60}{100} \times \frac{30}{100} = \frac{18}{100}$ donc $p(\bar{S} \cap D) = p(\bar{S}) \times p(D)$,

donc les événements $\bar{S}$ et D sont indépendants.

Exercice 6 :

Dans un magasin, 80% des cadenas proposés à la vente sont premier prix, les autres haut de gamme;

- 3% des cadenas haut de gamme sont défectueux ;
- 7% des cadenas premier prix sont défectueux.

On prélève au hasard un cadenas dans le magasin. On note :

- H l'événement : « le cadenas prélevé est haut de gamme» ;
- D l'événement : « le cadenas prélevé est défectueux ».

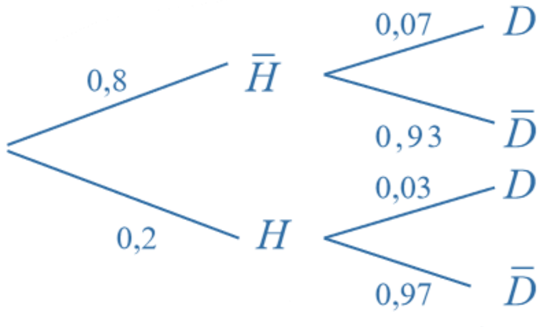
1. Interpréter les nombres de l'énoncé en termes de probabilités

La probabilité qu'un cadenas soit premier prix est : $p(\overline{\mathrm{H}}) = \frac{80}{100}$

La probabilité qu'un cadenas soit défectueux sachant qu'il est haut de gamme est ; $p_H(\mathrm{D}) = \frac{3}{100}$;

La probabilité qu'un cadenas soit défectueux sachant qu'il soit premier prix $p_{\overline{\mathrm{H}}}(\mathrm{D}) = \frac{7}{100}$

2. Représenter la situation à l'aide d'un arbre pondéré. Aucune justification n'est attendue.



3. Exprimer par une phrase l'événement $H \cap D$ et déterminer sa probabilité.

$H \cap D$: « le cadenas prélevé est un cadenas haut de gamme défectueux ».
$p(H \cap D) = p(H) \times p_H(\mathrm{D}) = 0{,}2 \times 0{,}3 = 0{,}006$

4. Déterminer la probabilité que le cadenas soit défectueux. Justifier votre réponse.
H et $\overline{\mathrm{H}}$ forment une partition de l'univers, on a donc d'après la formule des probabilités totales :

$$p(D) = p(\overline{\mathrm{H}} \cap D) + p(H \cap D) = p(\overline{\mathrm{H}}) \times p_{\overline{\mathrm{H}}}(\mathrm{D}) + p(H) \times p_H(\mathrm{D}) = 0{,}8 \times 0{,}07 + 0{,}2 \times 0{,}3 = 0{,}062.$$

La probabilité que le cadenas soit défectueux est de 0,062 soit 6,2%.

5. On prélève un cadenas en bon état. Déterminer la probabilité que ce soit un cadenas haut de gamme. Le résultat sera arrondi à 10^{-3}.

$$p(\overline{\mathrm{D}}) = 1 - p(D) = 1 - 0{,}062 = 0{,}938$$
$$p_{\overline{\mathrm{D}}}(\mathrm{H}) = \frac{p(\overline{\mathrm{D}} \cap H)}{p(\overline{\mathrm{D}})} = \frac{0{,}2 \times 0{,}97}{0{,}938} \approx 0{,}207$$

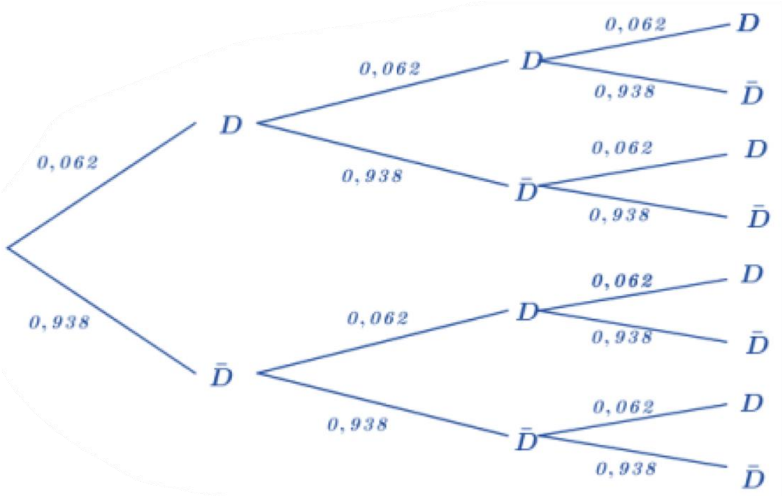
La probabilité que le cadenas soit en bon état sachant que c'est un cadenas en bon état est d'environ 0,207 soit 20,7%.

6. Les événements H et D sont-ils incompatibles ? Justifier.
$p(H \cap D) = 0{,}006 \neq 0$ donc H et D ne sont pas incompatibles , ils peuvent arriver en même temps puisqu'il existe des cadenas haut de gamme défectueux.

7. Les événements H et D sont-ils indépendants ? Justifier.
$p_H(\mathrm{D}) = 0{,}03$ et $p(D) = 0{,}062$ donc $p_H(\mathrm{D}) \neq p(D)$ donc H et D ne sont pas indépendants.

8. Pour cette question, on considère que la probabilité que le cadenas soit défectueux est 0,062.

On choisit successivement et avec remise 3 cadenas. Les résultats seront arrondis à 10^{-3}.
On peut construire l'arbre ci-contre :



a. Déterminer la probabilité qu'aucun cadenas ne soit défectueux.
La probabilité qu'aucun cadenas ne soit défectueux est $p_1 = 0{,}938 \times 0{,}938 \times 0{,}938 = 0{,}938^3 \approx 0{,}825$ soit environ 82,5%
Rq : Cela correspond au chemin du bas.

b. Déterminer la probabilité qu'au moins un cadenas ne soit pas défectueux.
La probabilité qu'au moins un cadenas ne soit pas défectueux est $1 - 0{,}062^3 \approx 1$
Rq : Cela correspond à tous les chemins sauf celui du haut.

c. Déterminer la probabilité qu'exactement deux cadenas soient défectueux.
Pour déterminer la probabilité qu'exactement deux cadenas soient défectueux, on repère tous les chemins avec deux D et un $\overline{\mathrm{D}}$:
il y en a 3, chacun de probabilité $0{,}062 \times 0{,}062 \times 0{,}062 \times 0{,}938$.
Ce qui donne $3 \times 0{,}062 \times 0{,}062 \times 0{,}062 \times 0{,}938 \approx 0{,}011$.
La probabilité qu'exactement deux cadenas soient défectueux est donc environ 0,011, soit environ 1,1%.

<u>*Exercice 7:</u>

1) Existe-t-il un réel strictement positif qui, additionné à son inverse donne 6.

Cherchons un nombre réel x strictement positif tel que :

$$x + \frac{1}{x} = 6 \Leftrightarrow \frac{x^2+1}{x} = 6 \Leftrightarrow x^2 + 1 = 6x \Leftrightarrow x^2 - 6x + 1 = 0$$

On a $\Delta = (-6)^2 - 4 \times 1 \times 1 = 32$. $\Delta > 0$, donc l'équation possède deux solutions distinctes :

$$x_1 = \frac{6-\sqrt{32}}{2} = 3 - 2\sqrt{2} \quad \text{et} \quad x_2 = \frac{6+\sqrt{32}}{2} = 3 + 2\sqrt{2}$$

Il existe donc deux nombres $3 - 2\sqrt{2}$ et $3 + 2\sqrt{2}$.

2) Déterminer le trinôme P tel que $P(1) = P(-2) = 0$ et $P(0) = 4$

Le trinôme a deux racines -2 et 1 , donc la forme factorisée de P est *:* $a(x+2)(x-1)$.
Pour $x = 0$, on obtient $a(x+2)(x-1) = a \times 2 \times (-1) = -2a = 4$ *d'où* $a = -2$
Ainsi $P = -2(x+2)(x-1)$.