Mathématiques 1ère EDS	Chapitre 3 : Suites numériques (1ère partie)	Algèbre

I – Définitions et notations :

☐ Définition d'une suite numérique et d'un terme

Une **suite numérique** $(\boldsymbol{u_n})$ est une **liste ordonnée de nombres réels** telle qu'à tout entier n , on associe un nombre réel noté u_n.
Une suite est donc une fonction de $\mathbb{N}$ (ou une partie de $\mathbb{N}$) dans $\mathbb{R}$:
$\boldsymbol{u : n \longrightarrow U_n}$ on note $\boldsymbol{u_n}$ l'image de n (on lit « u indice n » ou plus simplement « u_n »).

❖ **Notations :**

- **La suite** constituée des termes $\boldsymbol{u_n}$ est noté u ou (u_n) , on trouve également la notation $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ou $(u_n)_{n\geq n_0}$ si la suite commence à n_0.
- **Le terme général** de la suite ou terme **d'indice $\boldsymbol{n}$ est noté $\boldsymbol{u_n}$**

u_{n+1} est le terme d'indice $n+1$, celui qui suit U_n et u_{n-1} est le terme d'indice $n-1$, celui qui précède u_n.

❖ **Remarques :**

- Si la suite est définie sur $\mathbb{N}$ alors le terme u_0 est le 1er terme, u_1 est le 2ième terme…
- Si la suite est définie sur $\mathbb{N}/\{0\}$ alors le terme u_1 est le 1er terme, u_2 est le 2ième terme…
- En général, une suite est définie pour $n \in \mathbb{N}$, mais parfois elle peut n'être définie qu'à partir d'un certain rang.
- Attention à bien respecter la position des indices ! $u_{n+1} \neq u_n + 1$

❖ **Exemples :**

1) Pour tout $n \in \mathbb{N}$ $u_n = n^2$, calculer les cinq premiers termes de la suite :

On a $u_0 = 0^2 = 0$; $u_1 = 1^2 = 1$; $u_2 = 2^2 = 4$; $u_3 = 3^2 = 9$; $u_4 = 4^2 = 16$; $u_5 = 5^2 = 25$.

2) Notons la suite (v_n): $-4; -1;\ 2;\ 5;8$.;…
Le premier terme de la suite est $v_0 = -4$, calculer le terme v_5

$v_5 = 8 + 3 = 11$

En déduire une formule qui permette de calculer un terme connaissant le précédent c'est-à-dire v_{n+1} en fonction de v_n.
$v_{n+1} = v_n + 3$

II – Les différentes définitions (générations) d'une suite :

a) Par une formule explicite :

Une suite (u_n) est dite définie **explicitement** quand on connait chaque terme **en fonction de son indice** :

Pour tout entier n on a $u_n = f(n)$ où f est une fonction définie sur $\mathbb{N}$.

❖ **Exemples :**

1) La suite (u_n) définie par $u_n = \sqrt{n-3}$ n'est définie que pour $n \geq 3$. Calculer les termes suivants :

$u_3 =$	$u_4 =$	$u_4 =$	$u_6 =$

2) (w_n) est la suite définie sur par $\mathbb{N}$ par $w_n = \frac{1}{2}n - 1$

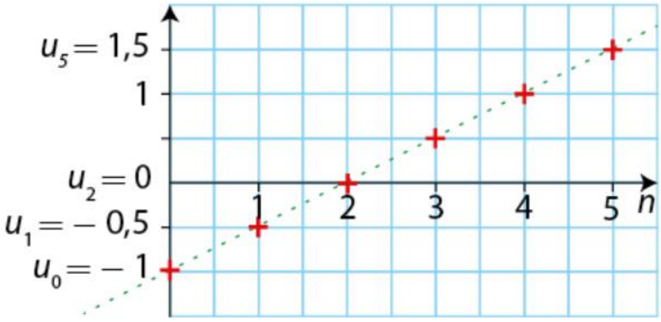
La représentation graphique d'une suite définie de manière explicite est un nuage de points de coordonnées $(n\,;u_n)$ pour tout $n \in \mathbb{N}$

Représenter graphiquement la suite (w_n) dans le repère ci-contre.

Ici , $w_n = f(n)$ avec f la fonction affine $x \longrightarrow \frac{1}{2}x - 1$.

Ainsi $w_0 = f(0) = \frac{1}{2} \times 0 - 1 = -1$; $w_1 = f(1) = \frac{1}{2} \times 1 - 1 = -0{,}5$; $w_2 = f(2) = \frac{1}{2} \times 2 - 1 = 0$

La courbe de la fonction f est la droite tracée en pointillés et la représentation graphique de la suite (w_n) est formée par tous les points rouges d'abscisses dans $\mathbb{N}$ de la courbe.



b) Par une formule de récurrence :

Une **formule de récurrence** définit les termes *de proche en proche*, elle explique comment passer d'un terme au suivant. C'est en général une relation entre deux termes consécutifs.

Le terme u_{n+1} est donné par une une expression du type $u_{n+1} = f(U_n)$ et la donnée du premier terme.

❖ **Exemples :**

1) Pour tout $n \in \mathbb{N}$ on a $w_{n+1} = 2w_n + 1$ et $w_0 = -2$. Calculer les cinq premiers termes de la suite :

$w_0 = -2$; $w_1 = 2w_0 + 1 = 2 \times (-2) + 1 = -3$; $w_2 = 2w_1 + 1 = 2 \times (-3) + 1 = -5$

$w_3 = 2w_2 + 1 = 2 \times (-5) + 1 = -9$; $w_4 = 2w_3 + 1 = 2 \times (-9) + 1 = -17$

2) Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a $u_{n+1} = \frac{2u_n}{u_n+1}$ et $u_0 = 1$ .Calculer les cinq premiers termes :

$u_0 = 1$; $u_1 = \frac{2u_0}{u_0+1} = \frac{2\times1}{1+1} = 1$; $u_2 = \frac{2u_1}{u_1+1} = \frac{2\times1}{1+1} = 1$ ....

c) Par un programme :

Le programme ci-contre calcule et affiche les termes w_0, w_1,..., w_n d'une suite (w_n), où n est la valeur de l'indice saisie en entrée. Compléter les termes de la suite w affichés par le programme lorsque $n = 6$.

```
def W(k):
    w=10-2*k
    return w

n=int(input("n ="))
for i in range(0,n+1):
    print(W(i))
```

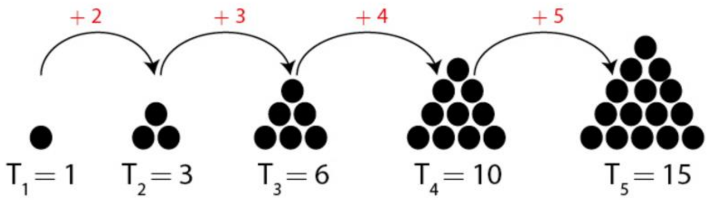
i	0	1	2	3	4	5	6
w_i	10	8	6	4	2	0	-2

d) Avec des motifs géométriques

Suite définie à partir de motifs géométriques : En poursuivant le procédé illustré ci-contre, on obtient

$T_6 = T_5 + 6 = 21$

(T_n) est la suite des nombres triangulaires.



III – Suite arithmétiques :

❖ **Exemples :**

Considérons la suite numérique (u_n) définie sur ℕ des nombres impairs.
Le premier terme est égal à 1, les premiers termes successifs sont :

$u_0 = 1$ $u_1 =$ $u_2 =$ $u_3 =$

Une telle suite est appelée une suite arithmétique de raison 2 et de premier terme 1.

La suite est donc définie pour tout n de ℕ, $\begin{cases} u_0 = 1 \\ u_{n+1} = u_n + 2 \end{cases}$

☐ **Définition : Formule de récurrence**
Une suite (u_n) est **suite arithmétique** s'il existe un nombre $\boldsymbol{r}$, appelé **la raison** de la suite, tel que pour tout entier n, on a : $\boldsymbol{u_{n+1} = u_n + r}$.
Chaque terme est obtenu en ajoutant la même quantité r, appelée raison de la suite, au terme précédent.

❖ **Méthode : Démontrer si une suite est arithmétique :**

Il suffit de calculer pour tout $n \in \mathbb{N}$, la différence $u_{n+1} - u_n$ et vérifier si elle est constante ou non.
1) La suite (u_n) définie par : $u_n = 7 - 9n$ est-elle arithmétique ?
2) La suite (v_n) définie par : $v_n = n^2 + 3$ est-elle arithmétique ?

1) $\forall\, n \in \mathbb{N}$ $u_{n+1} - u_n = 7 - 9(n+1) - 7 + 9n = 7 - 9n - 9 - 7 + 9n = -9.$

La différence entre un terme et son précédent reste constante et égale à –9.
(u_n) est une suite arithmétique de raison –9.

2) $\forall\, n \in \mathbb{N}$ $v_{n+1} - v_n = (n+1)^2 + 3 - n^2 - 3 = n^2 + 2n + 1 + 3 - n^2 - 3 = 2n + 1.$

La différence entre un terme et son précédent ne reste pas constante.
(v_n) n'est pas une suite arithmétique.

❖ Illustration:

$$u_0 \xrightarrow{+r} u_1 \xrightarrow{+r} u_2 \xrightarrow{+r} u_3 \xrightarrow{+r} u_4 \xrightarrow{+r} \cdots \quad \cdots \quad u_n \xrightarrow{+r} u_{n+1} \quad \cdots$$

Comment exprimer, par exemple, u_4 en fonction de u_0

On observe sur le schéma : $u_4 = u_0 + 4 \times 5$.

☐ **Propriété : Formule explicite**
(u_n) est une suite arithmétique de raison r et de premier terme u_0 .
Pour tout entier naturel n, on a : $\boldsymbol{u_n = u_0 + nr}$
De manière générale : Pour tous nombres n et p de ℕ on a : $\boldsymbol{u_n = u_p + (n-p)r}$

❖ **Démonstration au programme :**

La suite arithmétique (u_n) de raison r et de premier terme u_0 vérifie la relation
$u_{n+1} = u_n + r$.
En calculant les premiers termes :
$u_1 = u_0 + r$
$u_2 = u_1 + r$
$u_3 = u_2 + r$
…
$u_n = u_{n-1} + r$

En additionnant membre à membre ces n égalités, on obtient :

$$u_1 + u_2 + u_3 + \cdots + u_n = u_0 + u_1 + u_2 + \cdots + u_{n-1} + n \times r$$

Soit, en retranchant aux deux membres les termes identiques :

$$u_n = u_0 + nr$$

❖ **Méthode : Déterminer la raison et le premier terme d'une suite arithmétique connaissant deux termes :**

Considérons la suite arithmétique (u_n) tel que $u_5 = 7$ et $u_9 = 19$.
1) Déterminer la raison et le premier terme de la suite (u_n).
2) Exprimer u_n en fonction de n.

1) Les termes de la suite sont de la forme $u_n = u_0 + nr$
Ainsi $u_5 = u_0 + 5r = 7$ et $u_9 = u_0 + 9r = 19$.
En soustrayant membre à membre, on obtient :
$u_0 + 5r - u_0 - 9r = 7 - 19 \Leftrightarrow 5r - 9r = 7 - 19 \Leftrightarrow -4r = -12 \Leftrightarrow r = 3$.

Comme $u_0 + 5r = 7$, on a : $u_0 + 5 \times 3 = 7 \Leftrightarrow u_0 + 15 = 7 \Leftrightarrow u_0 = -8$.
(u_n) est une suite arithmétique de raison 3 et de premier terme $= -8$

2) $u_n = u_0 + nr$ soit $u_n = -8 + n \times 3$ soit $u_n = 3n - 8$

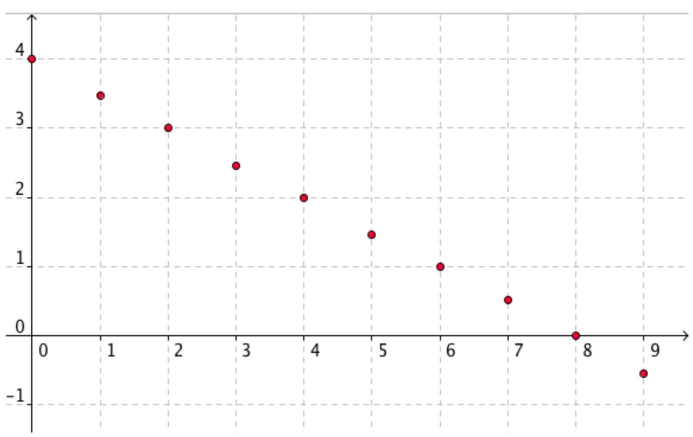
☐ **Représentation graphique**

Les points de la représentation graphique d'une suite arithmétique **sont alignés**.
pour tout entier n on a $u_n = u_0 + nr$ n en abscisse et u_n en ordonnée
d'où $y = u_0 + xr$ ce qui est bien une équation de droite.

❖ **Exemple :**

On a représenté ci-dessous la suite de raison –0,5 et de premier terme 4.

On dit que les **suites arithmétiques** correspondent à **des évolutions linéaires** elles permettent de modéliser des évolutions successives à **accroissements constants**



IV – Suite géométrique :

❖ **Exemples :**

Considérons une suite numérique (u_n) où le rapport entre un terme et son précédent reste constant et égale à 2, c'est-à-dire que l'on passe d'un terme au suivant en multipliant par ….
Si le premier terme est égal à 5, les premiers termes successifs sont :
$u_0 = 5$, $u_1 =$ $u_2 =$ $u_3 =$

Une telle suite est appelée une suite géométrique de raison 2 et de premier terme 5.

La suite est donc définie pour tout *n* de ℕ, $\begin{cases} u_0 = 5 \\ u_{n+1} = 2u_n \end{cases}$

☐ **Définition : Formule de récurrence**
Une suite (u_n) est **suite géométrique** s'il existe un nombre *q*, appelé **la raison** de la suite, tel que pour tout entier n, on a : $\boldsymbol{u_{n+1} = q \times u_n}$.   Chaque terme est obtenu en multipliant la même quantité q, appelée raison de la suite, au terme précédent.

❖ **Méthode : Démontrer si une suite est géométrique :**

Il suffit de calculer pour tout $n \in \mathbb{N}$, le quotient $\frac{u_{n+1}}{u_n}$ et vérifier si il est constante ou non.

La suite (u_n) définie par : $u_n = 3 \times 5^n$ est-elle géométrique ?

1) $\forall\, n \in \mathbb{N}$ $\quad \frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{3\times5^{n+1}}{3\times5^n} = \frac{5^{n+1}}{5^n} = 5^{n+1-n} = 5$

Le rapport entre un terme et son précédent reste constant et égale à 5.

(u_n) est une suite géométrique de raison 5 et de premier terme $u_0 = 3 \times 5^0 = 3$.

❖ **Exemple concret :**

On place un capital de 500€ sur un compte dont les intérêts annuels s'élèvent à 4%.
Chaque année, le capital est multiplié par 1,04
Ce capital suit une progression géométrique de raison 1,04
On a ainsi :
$u_1 = 1{,}04 \times 500 = 520$ $\qquad u_2 = 1{,}04 \times 520 = 540{,}80$
$u_3 = 1{,}04 \times 540{,}80 = 562{,}432$
De manière générale : $u_{n+1} = 1{,}04 \times u_n$ avec $u_0 = 500$
On peut également exprimer u_n en fonction de *n* : $u_n = 500 \times 1{,}04^n$.

❖ Illustration:

$$u_0 \xrightarrow{\times q} u_1 \xrightarrow{\times q} u_2 \xrightarrow{\times q} u_3 \xrightarrow{\times q} u_4 \xrightarrow{\times q} \cdots \quad \cdots \quad u_n \xrightarrow{\times q} u_{n+1} \quad \cdots$$

Comment peut-on exprimer u_5 en fonction de u_0 ?
D'après le schéma, $u_5 = u_0 \times q^5$

☐ **Propriété : Formule explicite**

(u_n) est une suite arithmétique de raison q et de premier terme u_0 .

Pour tout entier naturel *n*, on a **:** $\boldsymbol{u_n = u_0 \times q^n}$

De manière générale :
Pour tous nombres n et p de $\mathbb{N}$ on a **:** $\boldsymbol{u_n = u_p \times q^{n-p}}$

❖ **Démonstration au programme :**

La suite géométrique (u_n) de raison *q* et de premier terme *u₀* vérifie la relation
$u_{n+1} = q \times u_n$.
- Si *q* ou u_0 est nul, alors tous les termes de la suite sont nuls. La démonstration est évidente dans ce cas.
- Dans la suite, on suppose donc que *q* et u_0 sont non nuls. Dans ce cas, tous les termes de la suite sont non nuls.
En calculant les premiers termes :
$u_1 = q \times u_0$
$u_2 = q \times u_1$
$u_3 = q \times u_2$
…
$u_n = q \times u_{n-1}$
En multipliant membre à membre ces *n* égalités, on obtient :

$$u_1 \times u_2 \times u_3 \times \ldots \times u_n = u_0 \times u_1 \times u_2 \times \ldots \times u_{n-1} \times q^n$$

Comme les termes de la suite sont non nuls, on peut diviser aux deux membres les facteurs identiques :
$u_n = u_0 \times q^n$

❖ **Méthode : Déterminer la raison et le premier terme d'une suite géométrique connaissant deux termes :**

Considérons la suite géométrique (u_n) telle que $u_4 = 8$ et $u_7 = 512$.
Déterminer la raison et le premier terme de la suite (u_n).

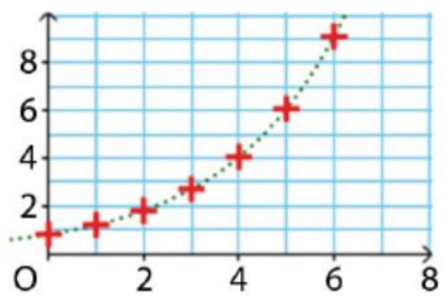
Les termes de la suite sont de la forme $u_n = u_0 \times q^n$.
Donc : $u_4 = u_0 \times q^4 = 8$ et $u_7 = u_0 \times q^7 = 512$.
Ainsi : $\frac{u_7}{u_4} = \frac{u_0 \times q^7}{u_0 \times q^4}$ $\Leftrightarrow$ $\frac{512}{8} = \frac{q^7}{q^4}$ $\Leftrightarrow$ $64 = q^3$
On utilise la fonction racine troisième de la calculatrice pour trouver le nombre qui élevé au cube donne 64.
Ainsi $q = \sqrt[3]{64} = 4$
Comme $u_4 = u_0 \times q^4 = 8$, on a : $u_0 \times 4^4 = 8$ $\Leftrightarrow u_0 = \frac{1}{32}$.

(u_n) est une suite géométrique de raison 4 et de premier terme $= \frac{1}{32}$

❖ **Exemple de représentation graphique :**

On a représenté ci-contre la suite (u_n) est une suite géométrique de raison 1,5 et de premier terme 0,8.
Pour tout nombre n de $\mathbb{N}$ on a **:** $u_n = 0{,}8 \times 1{,}5^n$

On dit que les **suites arithmétiques** correspondent à **des évolutions exponentielles.** Elles permettent de modéliser des évolutions successives **à taux de variation constants** .



V – Somme de termes consécutifs :

a) Cas d'une suite arithmétique :

☐ Théorème :

Pour tout entier naturel n non nul : $\mathbf{1+2+3+\cdots+n=\frac{n(n+1)}{2}}$

Il s'agit de la somme des n premiers termes d'une suite arithmétique de raison 1 et de premier terme 1.

❖ **Démonstration au programme :**

	1	+	2	+	3	+	…	+	$n-1$	+	n
+	n	+	$n-1$	+	$n-2$	+	…	+	2	+	1
	$(n+1)$	+	$(n+1)$	+	$(n+1)$	+	…	+	$(n+1)$	+	$(n+1)$

$= n \times (n+1)$

Donc : $2\times(1+2+3+\cdots+n)=n(n+1)$
Et donc : $1+2+3+\cdots+n=\frac{n(n+1)}{2}$.

☐ propriété :

La somme S des n premiers termes d'une suite arithmétique est

$$\boldsymbol{S = nombre\ de\ termes \times \frac{1er\ terme + dernier\ terme}{2}}$$

Dans le cas où le premier terme est u_o, on obtient : $S = n \times \frac{(u_o+u_{n-1})}{2}$

Dans le cas où le premier terme est u_1, on obtient : $S = n \times \frac{(u_1+u_n)}{2}$

Démonstration (cas où le premier terme est u_1) On va écrire S de deux façons différentes :

$S = u_1 + (u_1 + r) + \cdots + (u_1 + (n-2)r) + (u_1 + (n-1)r)$

$S = (u_n - (n-1)r) + (u_n - (n-2)r) + \cdots + (u_n - r) + u_n$

Donc $2S = n \times u_1 + n \times u_n$ les autres termes s'annulent d'où le résultat en divisant les deux membres par 2.

❖ **Exercice :**

Pour préparer une course, Manon décide de s'entraîner de façon progressive.
Elle commence son entraînement au « jour 0 » par un petit footing d'une longueur de 2 000 m. Au « jour 1 », elle court 2150 m. Au « jour 2 », il court 2300 m puis ainsi de suite en parcourant chaque jour 150 m de plus que la veille.
On note u_n la distance parcourue au « jour n » d'entraînement.

1) Quelle distance aura-t-il parcourue **au total** lorsqu'il sera au « jour 15 » de son entraînement ?
2) Quelle distance aura-t-il parcourue **au total** entre le « jour 8 » et le « jour 12 » ?

1) La distance parcourue au total au « jour 15 » d'entraînement est :

$$S = u_0 + u_1 + u_2 + \cdots + u_{15}$$

Or $\ Somme = nombre\ de\ termes \times \frac{1er\ terme+dernier\ terme}{2}$

Ainsi : $Somme = 16 \times \frac{u_0+u_{15}}{2} = 16 \times \frac{2000+2000+150\times 15}{2} = 16 \times \frac{6250}{2} = 50\ 000$

Ce qui signifie que Manon a parcouru 50 000 m soit 55 km au « jour 15 » d'entraînement.

Pour noter une telle somme, on peut utiliser le symbole $\sum$:

$$u_0 + u_1 + u_2 + \cdots + u_{15} = \sum_{k=0}^{15} u_k = 50\,000$$

Vérification à la calculatrice :

Sur TI :
- Pour accéder au catalogue : « 2nde » puis « 0 ».
- Appuyer sur « ln » pour accéder aux fonctionnalités commençant par « S ».
- Choisir « som(» ou « somme(» ou « sum(» (suivant les modèles).
- Procéder de même pour afficher « suite(» ou « seq(» (suivant les modèles).
- Et compléter pour afficher : **som(suite(2000+150X,X,0,15))**

2) La distance parcourue au total entre le « jour 8 » et le « jour 12 » d'entraînement est :

$$u_8 + u_9 + u_{10} + u_{11} + u_{12} = \sum_{k=8}^{12} u_k$$

$$Somme = 5 \times \frac{u_8 + u_{12}}{2} = 5 \times \frac{2000 + 150 \times 8 + 2000 + 150 \times 12}{2} = 5 \times \frac{7000}{2} = 17\,500$$

Ce qui signifie que Manon a parcouru 17 500 m soit 22,5 km au total entre le « jour 8 » et le « jour 12 »d'entraînement. Pour vérifier, on saisit sur la calculatrice : Sur TI : **som(suite(2000+150X,X,8,12))**

b) Cas d'une suite géométrique :

☐ **Théorème :**

Soit q un réel différent de 1. Alors pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a : $\boldsymbol{1 + q + q^2 + q^3 + \cdots + q^n = \frac{1-q^{n+1}}{1-q}}$

Il s'agit de la somme des $n+1$ premiers termes d'une suite géométrique de raison q et de premier terme 1.

❖ **Démonstration au programme :**

$S = 1 + q + q^2 + q^3 + \cdots + q^n$
$q \times S = q + q^2 + q^3 + q^4 + \cdots + q^{n+1}$
Ainsi :
$S - q \times S = (1 + q + q^2 + q^3 + \cdots + q^n) - (q + q^2 + q^3 + q^4 + \cdots + q^{n+1})$
$S - q \times S = 1 - q^{n+1}$
$S \times (1-q) = 1 - q^{n+1}$ d'où $S = \frac{1-q^{n+1}}{1-q}$

☐ **propriété :**

La somme S des n premiers termes d'une suite géométrique de raison q est

$$\boldsymbol{S = premier\ terme \times \frac{1 - q^{nbre\ de\ termes}}{1-q}}$$

Autrement dit : $S = u_0 + u_1 + u_2 + \cdots + u_n = u_o \times \frac{\boldsymbol{1-q^{n+1}}}{\boldsymbol{1-q}}$

❖ **Exercice :**

Calculer la somme S suivante :
$S = 1 + 3 + 3^2 + 3^3 + \cdots + 3^{13}$

$S = 1 + 3 + 3^2 + 3^3 + \cdots + 3^{13} = \frac{1-3^{14}}{1-q} = 2\,391\,484$