Mathématiques 1ère EDS	Devoir en Temps Libre n°4	Correction

Exercice 1 :

Un restaurant propose à sa carte deux types de dessert : un assortiment de macarons et une part de tarte tatin. Des études statistiques montrent que :

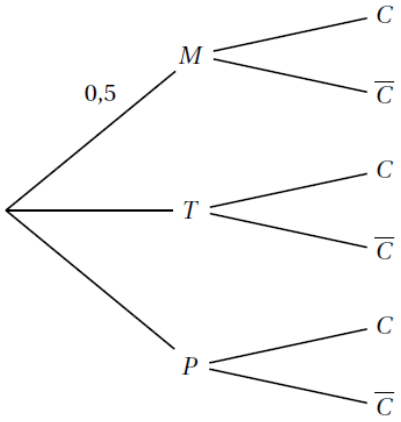
- l'assortiment de macarons est choisi par 50% des clients ;
- la part de tarte tatin, est choisie par 30% des clients ;
- 20% des clients ne prennent pas de dessert ;
- aucun client ne prend plusieurs desserts.

Le restaurateur a remarqué que :

- parmi les clients ayant pris un assortiment de macarons, 80% prennent un café;
- parmi les clients ayant pris une part de tarte tatin, 60% prennent un café;
- parmi les clients n'ayant pas pris de dessert, 90% prennent un café.
- On interroge au hasard un client de ce restaurant.

On note les évènements suivants :

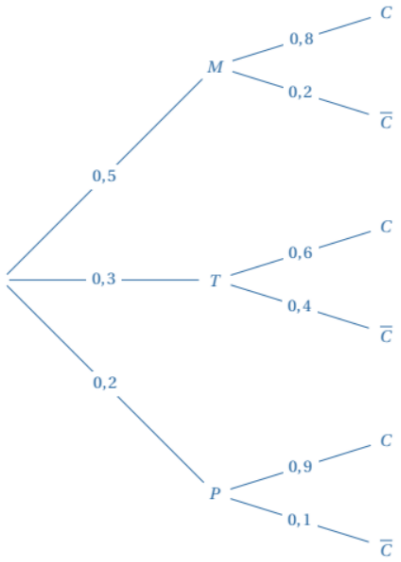
- *M* : « Le client prend un assortiment de macarons » ;
- *T* : « Le client prend une part de tarte tatin » ;
- *P* :« Le client ne prend pas de dessert » ;
- *C* : « Le client prend un café » et $\bar{C}$ l'évènement contraire de *C*.



1. En utilisant les données de l'énoncé, préciser la valeur de $P(T)$ probabilité de T et celle de $P_{\mathrm{T}}(C)$ probabilité de l'évènement C sachant que T est réalisé.

1.
Il y a 30 % des clients qui ont pris une tarte au tatin donc $P(T) = 30\% = 0{,}3$.
Parmi les clients ayant pris une part de tarte tatin, 60% prennent un café donc $P_{\mathrm{T}}(C) = 0{,}6$

2. Recopier et compléter l'arbre ci-dessous :



3. a. Exprimer par une phrase ce que représente l'évènement $M \cap C$ puis calculer $P(M \cap C)$.

$M \cap C$ est l'événement « Le client prend un assortiment de macarons et un café ».
$P(M \cap C) = P(M) \times P_M(C) = 0{,}5 \times 0{,}8 = 0{,}4$

b. Montrer que $P(C) = 0{,}76$.
M, T et P forment une partition de l'univers, d'après la formule des probabilités totales on a :
$P(C) = P(M \cap C) + P(T \cap C) + +P(T \cap P)$
$= 0{,}5 \times 0{,}8 + 0{,}3 \times 0{,}6 + 0{,}2 \times 0{,}9 = 0{,}76$
La probabilité que le client prenne un café est de 0,76

4. Quelle est la probabilité que le client prenne un assortiment de macarons sachant qu'il prend un café ? (On donnera le résultat arrondi au centième).

$P_{\mathrm{C}}(\mathrm{M}) = \dfrac{P(C \cap M)}{P(C)} = \dfrac{0{,}5 \times 0{,}8}{0{,}76} \approx 0{,}53$
La probabilité que le client prenne un assortiment de macarons sachant qu'il prend un café est environ égale à 0,53.

Exercice 2 :

1. Considérons la suite arithmétique $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ telle que $u_2 = 9$ et $u_8 = 51$.
Déterminer la raison et le premier terme de la suite (u_n).

Les termes de la suite s'écrivent de la forme $u_n = u_0 + nr$ pour tout $n \in \mathbb{N}$

Ainsi $u_2 = u_0 + 2r = 9$ et

$u_8 = u_0 + 8r = 51$

En soustrayant membre à membre, on obtient : $u_8 - u_2 = u_o + 8r - u_0 - 2r = 51 - 9$

Soit : $6r = 42$ donc $r = 7$

Comme $u_0 + 2r = 9$, on a : $u_0 + 2 \times 7 = 9$ et donc : $u_0 = 9 - 14 = -5$.

(u_n) est une suite arithmétique de raison 7 et de premier terme -5.

2. Considérons la suite géométrique $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ telle que $v_4 = 8$ et $v_7 = 512$.
Déterminer la raison et le premier terme de la suite (v_n).

Les termes de la suite s'écrivent de la forme $u_n = u_0 \times q^n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$

Donc : $u_4 = u_0 \times q^4 = 8$ et

$u_7 = u_0 \times q^7 = 512$.

Ainsi : $\frac{u_7}{u_4} = \frac{u_0 \times q^7}{u_0 \times q^4} = q^3$ et $\frac{u_7}{u_4} = \frac{512}{8} = 64$ donc $q^3 = 64$.

On utilise la fonction racine troisième de la calculatrice pour trouver le nombre qui élevé au cube donne 64.

Ainsi $q = \sqrt[3]{64} = 4$

Comme $u_0 \times q^4 = 8$, on a : $u_0 \times 4^4 = 8$ et donc : $u_0 = \frac{1}{32}$

Exercice 3 :

En 2019, le nombre d'abonnés à une page de réseau social d'un musicien était de 6 000.
On suppose que chaque année, il obtient 750 abonnés supplémentaires.
On désigne par *un* le nombre d'abonnés en $2019 + n$ pour tout entier naturel n.

1. Calculer le nombre d'abonnés en 2020 et 2021.

En 2020, il y aura 6 000 +750 = 6 750 abonnés

En 2021, il y aura 6 750 + 750 = 7 500 abonnés.

2. Exprimer u_{n+1} en fonction de u_n.

D'après l'énoncé, pour tout entier naturel n , on a $u_{n+1} = u_n + 750$

3. Quelle est la nature de la suite (u_n) ?

La suite (u_n) est donc une suite arithmétique de raison 750 et de premier terme 6 000.

4. En déduire une expression de u_n en fonction de *n*.

Ainsi pour tout entier naturel n , on a $u_n = 6000 + 750n$

5. En quelle année le nombre d'abonnés aura triplé par rapport à l'année 2019 ?

Il s'agit de résoudre $u_n \geq 3 \times 6000 \Leftrightarrow 6000 + 750n \geq 18\,000$

$\Leftrightarrow 750n \geq 12\,000$

$\Leftrightarrow n \geq 16$

$2019 + 16 = 2035$, c'est donc en 2035 que le nombre d'abonnés aura triplé par rapport à l'année 2019.

Exercice 4 :

P est la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par : $P(x) = 10x^3 - 37x^2 - 13x + 4$.

1. Vérifier que $-\frac{1}{2}$ est une racine de P.

$$P\left(-\frac{1}{2}\right) = 10 \times (-\frac{1}{2})^3 - 37 \times \left(-\frac{1}{2}\right)^2 - 13 \times \left(-\frac{1}{2}\right) + 4 = 0$$

Le nombre $-\frac{1}{2}$ est bien une racine du polynôme.

2. On admet que P est factorisable par $(x + \frac{1}{2})$

Déterminer les valeurs des nombres réels a, b, c tels que, pour tout nombre réel x,

$P(x) = (x + \frac{1}{2})(ax^2 + bx + c)$.

$P(x) = \left(x + \frac{1}{2}\right)(ax^2 + bx + c) = ax^3 + bx^2 + cx + 0{,}5ax^2 + 0{,}5bx + 0{,}5c$

$= ax^3 + (b + 0{,}5a)x^2 + (c + 0{,}5b)x + 0{,}5c$

Par identification :

$a = 10$; $b + 0{,}5a = -37 \Leftrightarrow b = -42$; $0{,}5c = 4 \Leftrightarrow c = 8$

On obtient donc $P(x) = \left(x + \frac{1}{2}\right)(10x^2 - 42x + 8)$

3.Déterminer toutes les racines de P.

Résolvant cette équation séparément :

$\left(x + \frac{1}{2}\right)(10x^2 - 42x + 8) = 0$

$10x^2 - 42x + 8$

On a $\Delta = (-42)^2 - 4 \times 10 \times 8 = 1444 > 0$, donc l'équation possède deux solutions distinctes :

$x_1 = \frac{42-38}{2\times10} = \frac{1}{5}$ et $x_2 = \frac{42-38}{2\times10} = 4$

L'ensemble des solutions est donc $S = \left\{-\frac{1}{2}; \frac{1}{5}; 4\right\}$.