Mathématiques 1ère EDS	Devoir en Temps Libre n°5	Correction

Exercice 1 : QCM

Pour les questions suivantes, une seule des quatre réponses proposées est exacte. Une réponse fausse, une réponse multiple ou l'absence de réponse à une question ne rapporte ni n'enlève de point.
Aucune justification n'est demandée.

Question		a	b	c	d
1	(u_n) est la suite définie pour tout $n \in \mathbb{N}$ par $u_n = 2n^2 - 4n$. Alors …	$u_{10} = 240$	$u_{15} = 390$	$u_{20} = 0$	$u_{100} = 1\,960$
2	(v_n) est la suite définie par $v_0 = 4$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$, $v_{n+1} = 2v_n - 3$. Alors …	$v_1 = 21$	$v_1 = 3$	$v_1 = 5$	$v_1 = 7$
3	(u_n) est la suite arithmétique de raison 10 telle que $u_2 = 5$. Pour tout nombre $n \in \mathbb{N}$,…	$u_n = -5 + 5n$	$u_n = 10 - \frac{5}{2}n$	$u_n = 5 \times 10^{n-2}$	$u_n = 10n - 15$
4	(u_n) est la suite géométrique de raison 10 telle que $u_0 = 3$. Pour tout nombre $n \in \mathbb{N}$,…	$u_n = 3 \times 10^n$	$u_n = 10 \times 3^n$	$u_n = 3 + 10n$	$u_n = 3 \times 10^{n-1}$

Exercice 2 :

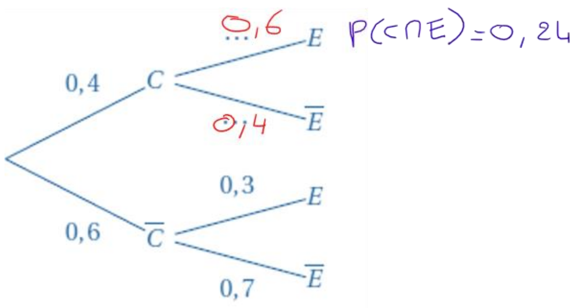
Une chaîne de salons de coiffure propose à ses clients qui viennent pour une coupe deux prestations supplémentaires cumulables :

- une coloration naturelle à base de plantes appelée « couleur-soin »,
- des mèches blondes pour donner du relief à la chevelure, appelées « effet coup de soleil ».

Il apparaît que 40% des clients demandent une « couleur-soin ». Parmi ceux qui ne veulent pas de « couleur soin », 30% des clients demandent un « effet coup de soleil ». Par ailleurs, 24% des clients demandent une « couleur soin » et un « effet coup de soleil ».
On interroge un client au hasard.
On notera C l'évènement « Le client souhaite une "couleur-soin." ».
On notera E l'évènement « Le client souhaite un "effet coup de soleil." ».

1. Donner les valeurs de $P(C)$, $P(C \cap E)$ et $P_{\bar{C}}(E)$.

On peut dresser un arbre pondéré de probabilités :



On a P (C) = 0,40 ;
- L'énoncé donne $P\ (C \cap E)\ =\ 0{,}24$;
- L'énoncé donne également $P_{\bar{C}}(\mathrm{E}) = 0{,}3$

2. Calculer la probabilité que le client ne souhaite ni une « couleur-soin », ni un « effet coup de soleil ».

On a $P(\bar{C} \cap \bar{E}) = P(\bar{C}) \times P_{\bar{C}}(\bar{E}) = 0{,}6 \times 0{,}7 = 0{,}42.$

3. Montrer que la probabilité de l'évènement *E* est égale à 0,42.

On a $P(C \cap E) = \mathrm{P}(\mathrm{C}) \times P_C(E) = 0{,}4 \times P_C(E) = 0{,}24.$
On en déduit que $P_C(E) = \frac{0{,}24}{0{,}4} = 0{,}6.$

D'après la loi des probabilités totales :

$$P(E) = P(E \cap C) + P(E \cap C) = 0{,}4 \times 0{,}6 + 0{,}6 \times 0{,}3 = 0{,}24 + 0{,}18 = 0{,}42.$$

4. Les évènements C et E sont-ils indépendants ?

On a $P(C \cap E) = 0{,}4 \times 0{,}6 = 0{,}24$ et $P(C) \times P(E) = 0{,}4 \times 0{,}42 = 0{,}168.$
Comme $P(C \cap E) \neq P(C) \times P(E)$, on en déduit que les évènements C et E ne sont pas indépendants.

Exercice 3 :

Partie A :

Soit (u_n) une suite géométrique de raison 2 de premier terme u_0= 0,2.

1. Calculer u_{18} puis u_{50}.

On sait que pour une suite géométrique de premier terme u_0 et de raison q, le terme général de rang $n + 1$, s'écrit $u_n = u_0 \times q^n$, donc

$u_8 = 0{,}2 \times 2^{18} = 0{,}2 \times 262144 = 52428{,}8$

$u_{50} = 0{,}2 \times 2^{50} \approx 225\,179\,981\,368\,520$

2. Calculer $u_0 + u_1 + u_2 + u_3 + \cdots + u_{18}$, c'est-à-dire la somme des 19 premiers termes de la suite (u_n)

$u_0 + u_1 + u_2 + u_3 + \cdots + u_{18} = 0{,}2 \times \frac{1-2^{19}}{1-2}$ = 104 857,4

3. Recopier et compléter les trois parties en pointillé de l'algorithme suivant permettant de déterminer le plus petit entier *n* tel que la somme des $n + 1$ premiers termes de la suite u dépasse 100 000.

```
U ← 0,2
S ← 0,2
N ← 0

Tant que ...... S < 100000
   U ← U * 2
   S ← S + U
   N ← N + 1

Fin tant que
Afficher N
```

```python
U=0.2
S=0.2
N=0
while S<100000:
    U=U*2
    S=S+U
    N=N+1
print("a partir de ",N,"la somme des termes dépasse 100 000")
```

Partie B :
Claude a donné 20 centimes d'euros (soit 0,20 €) à son petit-enfant Camille pour sa naissance.
Ensuite, Claude a doublé le montant offert d'une année sur l'autre pour chaque anniversaire jusqu'aux 18 ans de Camille. La somme totale versée par Claude à Camille permet-elle de payer un appartement à Angers d'une valeur de 100 000 ?

On retrouve dans les sommes versées par Claude exactement les premiers termes de la suite de la partie A et le total des sommes versées d'après le résultat de la question 3 de la partie A est 104 857,40 €. Camille pourra donc acheter l'appartement.

Exercice 4:

Arthur et Boris ont préparé chacun un programme d'entraînement à la course à pied en vue de participer à un semi-marathon (21,1 km).
Ils vont s'entraîner une fois par semaine selon les programmes suivants :

- ils démarrent par un entraînement de 3 000 m.
- à chaque entraînement, Arthur augmente sa distance de course de 600 m et Boris augmente sa distance de course de 7%.

Ils considèrent leur préparation achevée lorsqu'ils auront atteint ou dépassé pour la première fois la distance du semi-marathon.
On note a_n et b_n les distances en mètres parcourues par Arthur et Boris au cours de leur n$^{\text{ième}}$ entraînement.
Ainsi, $a_1 = b_1 = 3\,000$.

A. Préparation d'Arthur.

1. Exprimer a_{n+1} en fonction de a_n.
Arthur augmente sa distance de course de 600 m , donc (a_n) est une suite arithmétique de raison 600 et de premier terme a_1 =3000.
On a donc pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\boldsymbol{a_{n+1} = a_n + 600}$

2. Exprimer a_n en fonction de n.

Comme (a_n) est une suite arithmétique, on a donc pour tout $n \in \mathbb{N}$
$a_n = a_1 + (n-1)r = 3000 + 600(n-1)$

3. Calculer la distance parcourue par Arthur au cours du 10$^{\text{ème}}$ entraînement.

Il s'agit de calculer $a_{10} = 3000 + 600 \times 9 = 8400$
La distance sera de 8,4 km au bout de 10 entraînements.

4. Quelle distance aura parcouru Arthur au total durant les 20 premières semaines de son entraînement ?

Il s'agit de calculer la somme des 20 premiers termes de la suite, soit de a_1 à a_{20}.

$$a_{20} = 3000 + 600 \times 19 = 14400$$

$$S = a_1 + a_2 + \ \ldots .\ a_{20} = n \times \frac{(a_1+a_n)}{2} = 20 \times \frac{(a_1+a_{20})}{2} = 20 \times \frac{(3000+14400)}{2} = 174000\ m$$

Arthur aura parcouru 174 km durant les 20 premières semaines de son entraînement.

5. Combien de semaines va durer la préparation d'Arthur ?

Il faut résoudre dans $\mathbb{N}$, l'inéquation $a_n \geq 21100 \quad \Leftrightarrow 3000 + 600n \geq 21100$

$$\Leftrightarrow n \geq \frac{21100-3000}{600} \Leftrightarrow n \geq \frac{181}{6} \Leftrightarrow n \geq 31$$

Sa préparation va durer 31 semaines

B. Préparation de Boris.

1. Exprimer b_{n+1}en fonction de b_n.

Boris augmente sa distance de course de 7%, donc (b_n) est une suite géométrique de raison $1 + 7\% =$ 1,07 et de premier terme b_1 =3000.

Pour tout $n \in \mathbb{N}$ on a $\boldsymbol{b_{n+1} = 1,07 b_n}$

2. Exprimer b_n en fonction de n.
Comme (b_n) est une suite géométrique, on a pour tout $n \in \mathbb{N}$: $b_n = 3000 \times 1{,}07^{n-1}$

3. Calculer la distance parcourue par Boris au cours du 10ème entraînement.
Il s'agit de calculer $b_{10} = 3000 \times 1{,}07^{10-1} \approx 5515{,}4\, m$
La distance sera de 5,515 km au bout de 10 entraînements.

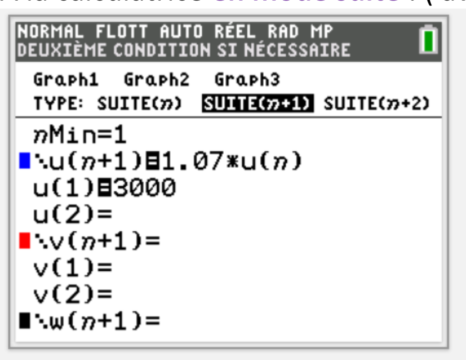
4. Quelle distance aura parcouru Boris au total durant les 20 premières semaines de son entraînement ?
Il s'agit de calculer la somme des 20 premiers termes de la suite, soit de b_1 à b_{20}.

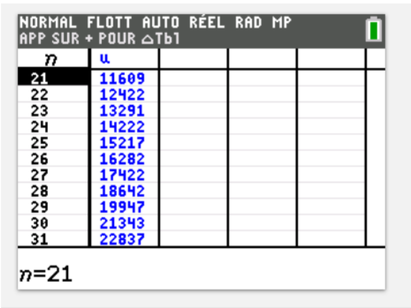
$$S = b_1 + b_2 + \ \ldots.\ b_{20} = b_1 \times \frac{\boldsymbol{1-q^n}}{\boldsymbol{1-q}} = \boldsymbol{3000} \times \frac{\boldsymbol{1-1,07^{20}}}{\boldsymbol{1-1.07}} \approx \boldsymbol{122986,5}$$

Boris aura parcouru 123 km environ durant les 20 premières semaines de son entraînement.

5. En utilisant le tableau de valeurs de la calculatrice, déterminer combien de semaines va durer la préparation de Boris

A la calculatrice **en mode suite** : (avec la même configuration de def table)





n	u
21	11609
22	12422
23	13291
24	14222
25	15217
26	16282
27	17422
28	18642
29	19947
30	21343
31	22837

Sa préparation va durer 30 semaines

Exercice 5 *:

La suite (v_n) est définie par :
$v_0 = 0$ et, $\forall\, n \in \mathbb{N}$, $v_{n+1} = v_n + 2n + 2$.
On définit la suite (w_n) par : $\forall\, n \in \mathbb{N}$, $w_n = v_{n+1} - v_n$

1. Déterminer le terme général de la suite (w_n) et en déduire sa nature.

Les suites (v_n) et (w_n) sont définis par : $v_0 = 0$ et $\forall\, n \in \mathbb{N}$, $w_n = v_{n+1} - v_n$

$\forall\, n \in \mathbb{N}$, $w_n = v_{n+1} - v_n = v_n + 2n + 2 - v_n = 2n + 2$

On en déduit que (w_n) est une suite arithmétique de raison 2 et premier terme 2.

2. On pose, pour tout nombre entier naturel n :

$$S_n = w_0 + w_1 + \cdots + w_n$$

a. Démontrer que, $\forall\, n \in \mathbb{N}$: $S_n = (\mathrm{n}+1)(\mathrm{n}+2)$

Il s'agit de calculer la somme des n premiers termes de la suite :

$$S_n = w_0 + w_1 + \cdots + w_n = (n+1) \times \frac{(w_0 + w_n)}{2} = (n+1) \times \frac{(2 + 2n + 2)}{2} = (n+1) \times \frac{(4 + 2n)}{2}$$
$$= (n+1) \times \frac{2(2+n)}{2} = (n+1)(n+2)$$

b. Démontrer que, $\forall\, n \in \mathbb{N}$: $S_n = v_{n+1} - v_0$.

$\forall\, n \in \mathbb{N}$, $S_n = w_0 + w_1 + \cdots + w_n$

C'est-à-dire $S_n = (v_1 - v_0) + (v_2 - v_1) + \cdots + (v_{n+1} - v_n)$

On a donc par phénomène de télescopage

$S_n = v_1 - v_0 + v_2 - v_1 + \cdots + v_{n+1} - v_n = v_{n+1} - v_0$

c. En déduire une formule explicite de v_n.

$\forall\, n \in \mathbb{N}^*$, $S_n = v_{n+1} - v_0$ ainsi $v_{n+1} = S_n + v_0$ et donc $v_n = S_{n-1} + v_0$

Or $S_{n-1} = (n-1+1)(n-1+2) = n(n+1)$ et $v_0 = 0$

donc $v_n = S_{n-1} + v_0 = n(n+1) + 0$ soit $v_n = n(n+1)$