ÉQUATIONS CARTÉSIENNES D'UNE DROITE

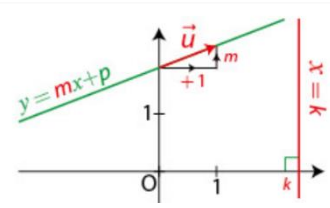
✧ Toute droite d admet une équation cartésienne de la forme $\boldsymbol{ax + by + c = 0}$, avec $(a; b) \neq (0\,;\,0)$ et avec $\overrightarrow{\boldsymbol{u}}(\boldsymbol{-b}; \boldsymbol{a})$ est un vecteur directeur de la droite d .

✧ Toute droite non parallèle à l'axe des ordonnées admet une équation réduite de la forme :

$\boldsymbol{y = mx + p}$; un vecteur directeur de la droite est $\vec{u}(1; m)$.

m est la pente (ou coefficient directeur) de la droite qui est égale à $\frac{y_B - y_A}{x_B - x_A}$

✧ Toute droite parallèle à l'axe des ordonnées a une équation de la forme $\boldsymbol{x = k}$.



Exercice 1 :

d et d' sont les droites d'équations cartésiennes

$x + 2y - 4 = 0$ et $2x - 3y - 3 = 0$

a. Calculer les ordonnées des points de d d'abscisses 0 et 2, puis tracer la droite d.

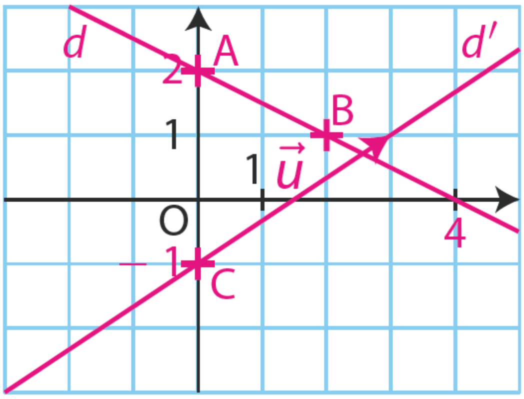
a. Si x = 0, alors 2y - 4 = 0 soit y = 2. Donc d passe par le point A(0 ; 2).

Si x = 2, alors 2 + 2y - 4 = 0 soit y = 1. Donc d passe par le point B(2 ; 1).

b. Déterminer un point de d' et un vecteur directeur de d' puis tracer la droite d'.

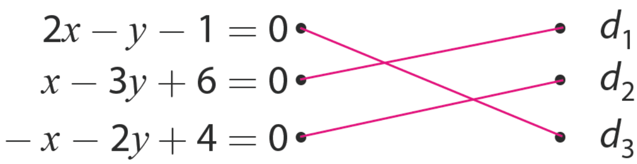
b. Si x = 0, alors - 3y - 3 = 0 soit y = - 1.

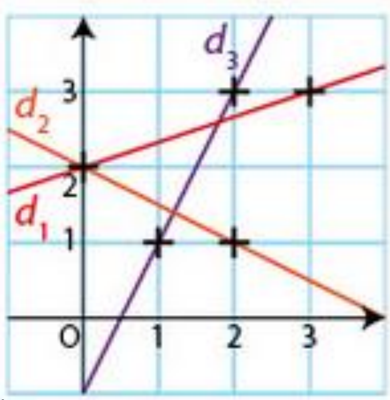
Donc d' passe par le point C(0 ; - 1). De plus, a = 2 et b = - 3 donc $\vec{u}(3; 2)$ est un vecteur directeur de d'.



Exercice 2 :

Voici trois droites dans un repère orthonormé. Associer chacune à son équation.





Exercice 3 :

Une droite d passe par le point A(5 ; 9) et admet le vecteur $\vec{u}$ (3 ; 4) pour tout vecteur directeur.

Déterminer une équation cartésienne de la droite d.

$\vec{u}$ (3 ; 4) est un vecteur directeur de d donc une équation de d est de la forme 4 x - 3y + c = 0.

Les coordonnées de A vérifient l'équation de d donc 4×5 - 3×9 + c = 0 c'est-à-dire - 7 + c = 0 soit c = 7.

Une équation cartésienne de la droite d est : 4x - 3y + 7 = 0.

Exercice 4 :

D(2 ;5) et E(9 ;1) sont deux points.

a) Calculer les coordonnées du vecteur $\overrightarrow{DE}$.

$\overrightarrow{DE}$ $(9 - 2\,;1 - 5)$ c'est-à-dire $\overrightarrow{DE}$ $(7\,;-4)$.

b) Déterminer une équation cartésienne de la droite (DE).

Soit un point M (x ; y) de la droite (DE) ; on a $\overrightarrow{DM}\begin{pmatrix} x-2 \\ y-5 \end{pmatrix}$.

Le point M appartient à (DE) si et seulement si les vecteurs $\overrightarrow{DM}\begin{pmatrix} x-2 \\ y-5 \end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{DE}\begin{pmatrix} 7 \\ -4 \end{pmatrix}$ sont colinéaires.

Ce qui équivaut à $det(\overrightarrow{DM}\,;\overrightarrow{DE}) = 0 \iff -4(x-2) - 7(y-5) = 0$

$\iff -4x + 8 - 7y + 35 = 0$

$\iff -4x - 7y + 43 = 0$

Une équation cartésienne de la droite (DE) est donc : $-4x - 7y + 43 = 0$

c) En déduire une équation réduite de la droite (DE) puis la pente de cette droite.

De $4x + 7y - 43 = 0$ on déduit $7y = -4x + 43$. Une équation réduite de (DE) est alors $y = -\frac{4}{7}x + \frac{43}{7}$.

La pente de la droite (DE) est $-\frac{4}{7}$.

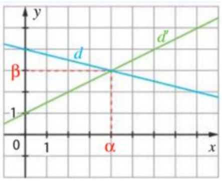
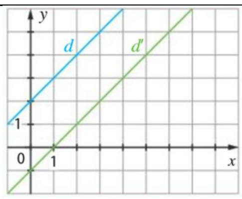
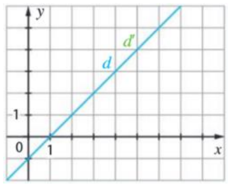
SYSTEMES D'ÉQUATIONS LINÉAIRES

✧**Un système de deux équations linéaires du premier degré à deux inconnues** x et y

est de la forme $\begin{cases} ax+by=c \\ a'x+b'y=c' \end{cases}$ où a, b, a' et b' sont des réels et $(x\ ;\ y)$ le couple des inconnues.

Résoudre ce système revient à **déterminer tous les couples solutions**, c'est-à-dire tous les couples vérifiant **simultanément** les deux équations du système.

✧ Dans un repère orthonormé, $ax+by+c=0$ et $a'x+b'y+c'=0$ sont les équations de deux droites d et d' .
$\vec{u}\,(-b\ ;a)$ et $\vec{v}\,(-b'\ ;a')$ sont des vecteurs directeurs respectifs d et d' .
Il y a trois cas possibles pour l'ensemble des solutions du système (S). Les voici :

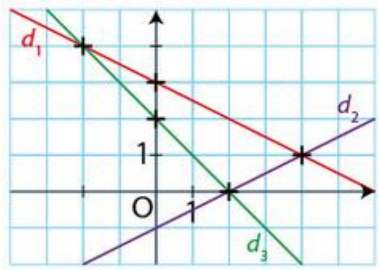
$ab'-a'b\neq 0$	$ab'-a'b=0$	
d et d' sont sécantes . Le système admet une unique solution : le couple $(\alpha;\beta)$.	d et d' sont strictement parallèles. Le système n'admet aucune solution.	d et d' sont confondues. (S) a une infinité de couples solutions.
		

Exercice 1 :

Dans un repère orthonormé, d_1, d_2 , d_3 sont les droites d'équations respectives $y=-0{,}5x+3$, $y=0{,}5x-1$ et $y=-x+2$. Donner la solution de chaque système.

a. $\begin{cases} y=-0{,}5x+3 \\ x+y=2 \end{cases}$ (- 2 ; 4)

b. $\begin{cases} y=0{,}5x-1 \\ x+y=2 \end{cases}$ (2 ; 0)



Exercice 2 :

(S) est le système $\begin{cases} 5x-3y=17 \\ 2x+y=9 \end{cases}$

a. Expliquer pourquoi (S) a un seul couple solution.

b. Résoudre le système en utilisant la méthode par substitution.

a. $ab'-a'b = 5\times 1 - 2\times(-3) = 11$ et $11\neq 0$.

b.

$\begin{cases} 5x-3y=17 \\ 2x+y=9 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 5x-3y=17 \\ y=9-2x \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 5x-3(9-2x)=17 \\ 2x+y=9 \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} 5x-27+6x=17 \\ y=9-2x \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 11x=44 \\ y=9-2x \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=4 \\ y=1 \end{cases}$

Le couple (4 ; 1) est l'unique solution du système (S).

Exercice 3 :

(S') est le système $\begin{cases} 5x-2y=1 \\ 3x+4y=-2 \end{cases}$

a. Expliquer pourquoi (S') a un seul couple solution.

b. Résoudre le système en utilisant la méthode par combinaison.

a. $ab'-a'b = 5\times 4 - 2\times 3 = 3$ et $3\neq 0$.

b. $\begin{cases} 5x-2y=1 \\ 3x+4y=-2 \end{cases} \begin{pmatrix} \times 2 \\ \ \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} 10x-4y=2 \\ 3x+4y=-2 \end{cases}$

$\dfrac{+\begin{cases} 10x-4y=2 \\ 3x+4y=-2 \end{cases}}{13x=0} \Leftrightarrow x=0$

On remplace dans une des équations la valeur de x , on obtient :
$4y=-2 \Leftrightarrow y=-0{,}5$

Le système (S) a un unique couple solution : $(0\ ;-0{,}5)$.

Exercice 4 :

Dans un repère orthonormé, A(10 ;6) , B(8 ;9) et C(5 ;4) sont trois points.
Déterminer l'équation réduite de la droite d parallèle à la droite (AB) qui passe par C.

$\overrightarrow{AB}$(8 - 10 ; 9 - 6)= (- 2 ; 3). $\vec{u}=-\frac{1}{2}\overrightarrow{AB}$, c'est-à-dire $\vec{u}\left(1;-\frac{3}{2}\right)$ est aussi un vecteur directeur de d.

d a une équation réduite de la forme $y=-\frac{3}{2}x+p$.

C(5 ;4) appartient à d donc $4=-\frac{3}{2}\times 5+p$ et $p=\frac{23}{2}$.

L'équation réduite de d est $y=-\frac{3}{2}x+\frac{23}{2}$