I – Signe d'une fonction du second degré :

On a vu que le polynôme du second degré $ax^2 + bx + c$ peut (éventuellement) se factoriser sous forme d'un produit de facteurs du premier degré, ce qui va nous permettre de déterminer son signe.

☐ Théorème :

Un polynôme du second degré $ax^2 + bx + c$ ($a \neq 0$) est du signe de a, sauf entre les racines quand elles existent.

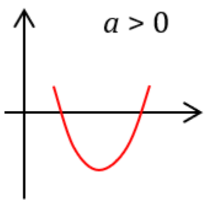
❖ Démonstration :

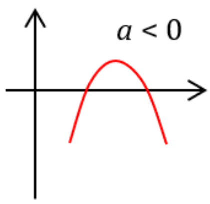
Soit f une fonction du second degré, définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = ax^2 + bx + c$ avec $a \neq 0$.
On sait que le nombre de racines de cette fonction (le nombre de zéros dans le tableau de signes) dépend du signe de $\Delta = b^2 - 4ac$.

▶ **1er cas : $\Delta > 0$**

on sait que le polynôme possède deux racines x_1 et x_2 et que sa factorisation est $f(x) = a(x - x_1)(x - x_2)$.
Le signe de f peut alors être déterminé grâce à la règle des signes !

x	$-\infty$		x_1		x_2		$+\infty$
a		Signe de a		Signe de a		Signe de a	
$x - x_1$		$-$	0	$+$		$+$	
$x - x_2$		$-$		$-$	0	$+$	
$f(x)$		Signe de a	0	- Signe de a	0	Signe de a	

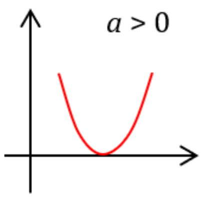


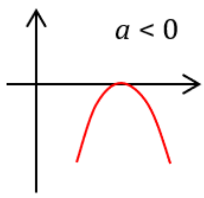


▶ **2ème cas : $\Delta = 0$**

on sait que le polynôme possède une unique racine x_0 et que sa factorisation est $f(x) = a(x - x_0)^2$
Le signe de f peut alors être déterminé grâce à la règle des signes !

x	$-\infty$		x_0		$+\infty$
a		Signe de a		Signe de a	
$x - x_0$		$-$	0	$+$	
$x - x_0$		$-$	0	$+$	
$f(x)$		Signe de a	0	Signe de a	

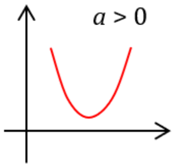


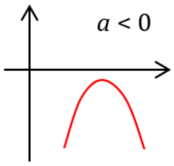


▶ **3ème cas : $\Delta < 0$**

Le polynôme n'a pas de racine, on ne peut pas le factoriser. La parabole ne coupe jamais l'axe des abscisses, donc elle est toujours de même signe.
Si $a > 0$, la parabole est ouverte vers le haut. Comme l'axe des abscisses ne la coupe pas, c'est qu'il est en dessous, donc la fonction est toujours positive comme a.
Si $a < 0$, la parabole est ouverte vers le bas. Comme l'axe des abscisses ne la coupe pas, c'est qu'il est au-dessus, donc la fonction est toujours négative comme a.

x	$-\infty$ $\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad$ $+\infty$
$f(x)$	Signe de a





- **<u>Exercice d’application : Etudier le signe d’une fonction polynôme du second degré</u>**

Etudier le signe de la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = 2x^2 - x - 6 = 0$

- **<u>Exercice d’application : Résoudre une inéquation du second degré</u>**

Résoudre l’inéquation : $x^2 + 3x - 5 < -x + 2$
On commence par rassembler tous les termes dans le membre de gauche afin de pouvoir étudier les signes des trinômes.

II – Application : position relative de deux courbes :

☐ Définition et méthode :

Étudier la **position relative** de deux courbes, c'est déterminer laquelle est graphiquement située au-dessus de l'autre. Cela peut varier suivant les intervalles.

Méthode :

Soient f et g deux fonctions définies sur $\mathbb{R}$. Pour étudier la position relative de C_f et C_g :

- on calcule la différence $f(x) - g(x)$;
- on étudie son signe dans un tableau;
- on conclut : sur les intervalles où la différence est positive, c'est C_f qui est au-dessus, et inversement.

❖ **Exercice :**

Soient f et g deux fonctions définies sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = -x^2 + 8x - 11$ et $g(x) = x - 1$.
Étudier la position relative des courbes représentatives C_f et C_g.

Vérification à la calculatrice :

Sur la calculatrice, tracer les deux courbes C_f et C_g.
Paramétrer la fenêtre du graphique
A l'aide des outils trace ou calculs, déterminer les points d'intersections de C_f et C_g.
Conclure