Mathématiques 1ère EDS	<u>Chapitre 4 :</u> Le second degré (2ème partie)	Algèbre

I – Signe d'une fonction du second degré :

On a vu que le polynôme du second degré $ax^2 + bx + c$ peut (éventuellement) se factoriser sous forme d'un produit de facteurs du premier degré, ce qui va nous permettre de déterminer son signe.

☐ **Théorème :**
Un polynôme du second degré $ax^2 + bx + c$ ($a \neq 0$) est du signe de a, sauf entre les racines quand elles existent.

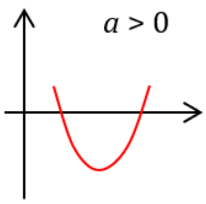
❖ **Démonstration :**

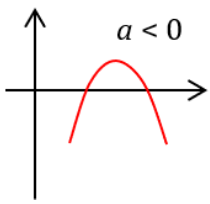
Soit f une fonction du second degré, définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = ax^2 + bx + c$ avec $a \neq 0$.
On sait que le nombre de racines de cette fonction (le nombre de zéros dans le tableau de signes) dépend du signe de $\Delta = b^2 - 4ac$.

▶ **1er cas : $\Delta > 0$**

on sait que le polynôme possède deux racines x_1 et x_2 et que sa factorisation est $f(x) = a(x - x_1)(x - x_2)$.
Le signe de f peut alors être déterminé grâce à la règle des signes !

x	$-\infty$		x_1		x_2		$+\infty$
a		Signe de a		Signe de a		Signe de a	
$x - x_1$		$-$	0	$+$		$+$	
$x - x_2$		$-$		$-$	0	$+$	
$f(x)$		Signe de a	0	- Signe de a	0	Signe de a	

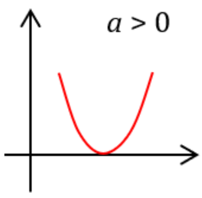


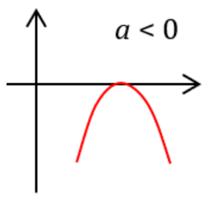


▶ **2ème cas : $\Delta = 0$**

on sait que le polynôme possède une unique racine x_0 et que sa factorisation est $f(x) = a(x - x_0)^2$
Le signe de f peut alors être déterminé grâce à la règle des signes !

x	$-\infty$		x_0		$+\infty$
a		Signe de a		Signe de a	
$x - x_0$		$-$	0	$+$	
$x - x_0$		$-$	0	$+$	
$f(x)$		Signe de a	0	Signe de a	

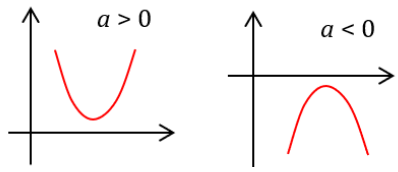




▶ **3ème cas : $\Delta < 0$**

Le polynôme n'a pas de racine, on ne peut pas le factoriser. La parabole ne coupe jamais l'axe des abscisses, donc elle est toujours de même signe.
Si $a > 0$, la parabole est ouverte vers le haut. Comme l'axe des abscisses ne la coupe pas, c'est qu'il est en dessous, donc la fonction est toujours positive comme a.
Si $a < 0$, la parabole est ouverte vers le bas. Comme l'axe des abscisses ne la coupe pas, c'est qu'il est au-dessus, donc la fonction est toujours négative comme a.

x	$-\infty$ $\qquad\qquad\qquad\qquad$ $+\infty$
$f(x)$	Signe de a



❖ Exercice d'application : Etudier le signe d'une fonction polynôme du second degré

Etudier le signe de la fonction f définie sur ℝ par $f(x) = 2x^2 - x - 6 = 0$

Calculons le discriminant $\Delta = b^2 - 4ac$ = $(-1)^2 - 4 \times 2 \times (-6) = 49$.

Comme $\Delta > 0$, donc la fonction polynôme f a deux racines distinctes :

$$x_1 = \frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-(-1)-\sqrt{49}}{2\times2} = -\frac{3}{2} \qquad x_2 = \frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-(-1)+\sqrt{49}}{2\times2} = 2$$

La fonction polynôme a le signe de a sauf entre ses racines, ici $a = 2 > 0$
d'où le tableau de signe de $f(x)$:

x	-∞		-1,5		2		+∞
$f(x)$		+	0	-	0	+	

❖ Exercice d'application : Résoudre une inéquation du second degré

Résoudre l'inéquation : $x^2 + 3x - 5 < -x + 2$

On commence par rassembler tous les termes dans le membre de gauche afin de pouvoir étudier les signes des trinômes.

$x^2 + 3x - 5 < -x + 2 \iff x^2 + 4x - 7 < 0.$

Le discriminant de $x^2 + 4x - 7$ est $\Delta = 4^2 - 4 \times 1 \times (-7) = 44$ et ses racines sont :

$x_1 = \frac{-4-\sqrt{44}}{2\times1} = -2 - \sqrt{11}$ et $x_2 = \frac{-4+\sqrt{44}}{2\times1} = -2 + \sqrt{11}$

On obtient le tableau de signes :

x	$-\infty$		$-2-\sqrt{11}$		$-2+\sqrt{11}$		$+\infty$
$f(x)$		+	0	−	0	+	

L'ensemble des solutions de l'inéquation $x^2 + 3x - 5 < -x + 2$ est donc $]-2-\sqrt{11}\,;\,-2+\sqrt{11}[$.

II – Application : position relative de deux courbes :

☐ **Définition et méthode :**
Étudier la **position relative** de deux courbes, c'est déterminer laquelle est graphiquement située au-dessus de l'autre. Cela peut varier suivant les intervalles. **Méthode :** Soient f et g deux fonctions définies sur $\mathbb{R}$. Pour étudier la position relative de C_f et C_g : ▪ on calcule la différence $f(x) - g(x)$; ▪ on étudie son signe dans un tableau; ▪ on conclut : sur les intervalles où la différence est positive, c'est C_f qui est au-dessus, et inversement.

❖ **Exercice :**

Soient f et g deux fonctions définies sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = -x^2 + 8x - 11$ et $g(x) = x - 1$.
Étudier la position relative des courbes représentatives C_f et C_g.

Etudions le signe de la différence $f(x) - g(x)$:
$f(x) - g(x) = -x^2 + 8x - 11 - x + 1 = -x^2 + 7x - 10.$
Le discriminant du trinôme $-x^2 + 7x - 10$ est $\Delta\ =\ 72 - 4\ x\ (-1)\ x\ (-10)\ =\ 9$
Le trinôme possède deux racines distinctes :
$x_1 = \frac{-7-\sqrt{9}}{2\times(-1)} = 5$ et $x_2 = \frac{-7+\sqrt{9}}{2\times(-1)} = 2$

On en déduit le tableau de signes suivant :

x	$-\infty$		2		5		$+\infty$
$f(x) - g(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	

On en conclut que :

La courbe C_f est en-dessous de la courbe C_g pour tout x de $]-\infty\,;2] \cup [5\,;\,+\infty[$.

La courbe C_f est au-dessus de la courbe C_g pour tout x de $[2\,;5]$.

Vérification à la calculatrice :

Sur la calculatrice, tracer les deux courbes C_f et C_g.
Paramétrer la fenêtre du graphique
A l'aide des outils trace ou calculs, déterminer les points d'intersections de C_f et C_g.
Conclure