

Mathématiques 1 ^{ère} EDS	Devoir en Temps Libre n°6	Correction
---------------------------------------	---------------------------	------------

Exercice 1 :

Soit $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$, une suite arithmétique de raison $\frac{1}{2}$, telle que $u_1 = -1$.

1. Calculer u_{100}

1. $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est une suite arithmétique de raison $\frac{1}{2}$ et de premier terme $u_1 = -1$

donc $\forall n \in \mathbb{N}: u_n = u_1 + (n - 1)r$

on obtient donc $u_{100} = u_1 + (100 - 1) \times \frac{1}{2} = -1 + 99 \times 0,5 = 48,5$

2. Déterminer à partir de quel rang N on a $u_n \geq 100$

2. On doit résoudre dans $\mathbb{N} : u_n \geq 100 \Leftrightarrow u_1 + (n - 1)r \geq 100$

$$\Leftrightarrow -1 + (n - 1) \times 0,5 \geq 100 \Leftrightarrow -1 + 0,5n - 0,5 \geq 100$$

$$\Leftrightarrow -1,5 + 0,5n \geq 100 \Leftrightarrow 0,5n \geq 101,5 \Leftrightarrow n \geq \frac{101,5}{0,5}$$

$$\Leftrightarrow n \geq 203$$

C'est donc à partir du rang 203 que $u_n \geq 100$

3. Calculer la somme $S = u_1 + u_2 + \dots + u_{25}$

Formule de la somme des termes d'une suite arithmétique : $S = \text{nombre de termes} \times \frac{\text{1er terme} + \text{dernier terme}}{2}$

$$u_{25} = u_1 + (25 - 1) \times \frac{1}{2} = -1 + 24 \times 0,5 = 11 \quad \text{et} \quad u_1 = -1$$

$$S = u_1 + u_2 + \dots + u_{25} = 25 \times \frac{-1+11}{2} = 125$$

4. Calculer la somme $S' = u_{26} + u_{27} + \dots + u_{50}$

$$S = \text{nombre de termes} \times \frac{\text{1er terme} + \text{dernier terme}}{2}$$

$$u_{26} = u_1 + (26 - 1) \times \frac{1}{2} = -1 + 25 \times 0,5 = 11,5 ; u_{50} = u_1 + (50 - 1) \times \frac{1}{2} = -1 + 49 \times 0,5 = 23,5$$

$$S' = u_{26} + u_{27} + \dots + u_{50} = (50 - 26 + 1) \times \frac{11,5 + 23,5}{2} = 25 \times 17,5 = 437,5$$

Exercice 2 :

Une angine peut être provoquée soit par une bactérie (angine bactérienne) soit par un virus (angine virale). On admet qu'un malade ne peut pas être à la fois porteur du virus et de la bactérie. L'angine est bactérienne dans 20 % cas.

Pour déterminer si une angine est bactérienne, on dispose d'un test. Le résultat du test peut être positif ou négatif. Le test est conçu pour être positif lorsque l'angine est bactérienne mais il présente des risques d'erreur :

- si l'angine est bactérienne, le test est négatif dans 30% des cas
- si l'angine est virale, le test est positif dans 10% des cas

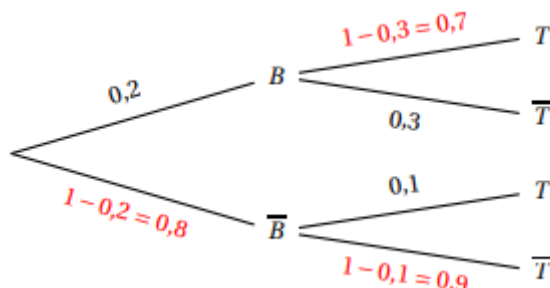
On choisit au hasard un malade atteint d'angine. On note :

- B l'événement : « l'angine est bactérienne » ;
- T l'événement : « le test effectué sur le malade est positif »

Si besoin, les résultats seront arrondis à 10^{-3} près.

1. Représenter la situation par un arbre pondéré.
2. Quelle est la probabilité que l'angine soit bactérienne et que le test soit positif ?
3. Montrer que la probabilité que le test soit positif est 0,22.
4. Un malade est choisi au hasard parmi ceux dont le test est positif. Quelle est la probabilité pour que son angine soit bactérienne ?

1. On représente la situation par un arbre de probabilité :



2. L'angine du malade est bactérienne et le test est positif correspond à $B \cap T$:

$$p(B \cap T) = p(B) \times p_T(B) = 0,2 \times 0,7 = 0,14$$
3. D'après la formule des probabilités totales :

$$p(T) = p(B \cap T) + p(\bar{B} \cap T) = p(B) \times p_B(T) + p(\bar{B}) \times p_{\bar{B}}(T) = 0,2 \times 0,7 + 0,8 \times 0,1 = 0,14 + 0,08 = 0,22$$
4. Un malade est choisi au hasard parmi ceux dont le test est positif. La probabilité pour que son angine soit bactérienne est :

$$p_T(B) = \frac{p(B \cap T)}{p(T)} = \frac{0,14}{0,22} \approx 0,64$$

Exercice 3:

Monsieur Noméco veut comparer le prix de deux mutuelles commercialisées par les assureurs Mutuanet et Assurdix.

Pour chaque assureur, le prix initial proposé est de 300 euros par an en 2023.

Partie A. L'assureur Mutuanet prévoit une augmentation de 10 euros par an.

On note u_n le prix annuel, en euros, de la mutuelle de cet assureur en 2023 + n .

Ainsi $u_0 = 300$.

1. Pour tout entier naturel n , exprimer u_{n+1} en fonction de u_n .
 Quelle est la nature de la suite (u_n) ?
2. En déduire l'expression de u_n en fonction de n , pour tout entier naturel n .
3. Déterminer le prix annuel, en euros, de cette mutuelle en 2035 ?
4. a. Démontrer que, pour tout entier naturel n :

$$u_0 + u_1 + u_2 + \cdots + u_n = (n + 1)(5n + 300).$$

- b. En déduire la somme, en euros, que M. Noméco devra payer au total en 25 ans s'il choisit l'assureur Mutua-net.

Partie B. L'assureur Assurdix prévoit une augmentation de 2% euros par an.

On note v_n le prix annuel, en euros, de la mutuelle de cet assureur en 2023 + n .

Ainsi $v_0 = 300$.

1. Pour tout entier naturel n , exprimer v_{n+1} en fonction de v_n .
Quelle est la nature de la suite (v_n) ?
2. En déduire l'expression de v_n en fonction de n , pour tout entier naturel n .
3. Vérifier que le prix annuel en 2035 est de 380,47 euros au centime près.
4. Déterminer la somme, à l'euro près, que M. Noméco devra payer au total en 25 ans s'il choisit l'assureur Assurdix.

Partie C. Monsieur Noméco a écrit l'algorithme ci-contre.

1. Quel est le but de cet algorithme ?
2. Quelle valeur de la variable n affiche-t-il ?

```

U ← 300
V ← 300
n ← 0
Tant que V ≤ U faire
    U ← U + 10
    V ← V × 1,02
    n ← n + 1
Fin Tant que
Afficher n

```

Partie A

1. Pour tout entier naturel n : $u_{n+1} = u_n + 10$

La suite (u_n) est une suite arithmétique de raison 10 et de premier terme $u_0 = 300$

2. Pour tout entier naturel n : $u_n = u_0 + nr = 300 + 10n$
3. Il s'agit de calculer $u_{12} = 300 + 10 \times 12 = 420$
Le prix annuel, en euros, de cette mutuelle en 2035 sera de 420 €
4. Pour tout entier naturel n :

$$\begin{aligned}
 u_0 + u_1 + u_2 + \dots + u_n &= \text{nbre de terme} \times \frac{\text{1er terme} + \text{dernier terme}}{2} \\
 &= (n+1) \times \frac{(300 + 300 + 10n)}{2} = (n+1) \times (300 + 5n)
 \end{aligned}$$

5. Il s'agit de calculer $u_0 + u_1 + u_2 + \dots + u_{24} = (24+1) \times (300 + 5 \times 24) = 10500$
La somme, en euros, que M. Noméco devra payer au total en 25 ans s'il choisit l'assureur Mutua-net est de 10 500 €

Partie B

1. Pour tout entier naturel n : $v_{n+1} = 1,02v_n$
La suite (v_n) est une suite géométrique de raison $1,02 = 1 + 2\%$ et de premier terme $v_0 = 300$
2. Pour tout entier naturel n : $v_n = v_0 \times q^n = 300 \times 1,02^n$
3. Il s'agit de calculer $v_{12} = 300 \times 1,02^{12} \approx 380,47$
Le prix annuel, en euros, de cette mutuelle en 2035 sera de 380,47 €
4. $v_0 + v_1 + v_2 + \dots + v_{24} = \text{1er terme} \times \frac{1-q^{\text{nbre de termes}}}{1-q} = 300 \times \frac{1-1,02^{25}}{1-1,02} \approx 9609,09$
La somme, en euros, que M. Noméco devra payer au total en 25 ans s'il choisit l'assureur Assurdix est de 9609,09€

Partie C

1. Le but de cet algorithme est de déterminer la valeur de n à partir de laquelle le prix annuel payée avec Assurdix modélisée par la suite (v_n) devient inférieure à celle payée avec Mutua-net modélisée par la suite (u_n) .
2. **A la calculatrice :**

NORMAL FLOTT AUTO RÉEL RAD MP		
Graph1	Graph2	Graph3
$\text{Y}_1 = 300 + 10X$		
$\text{Y}_2 = 300 * 1.02^X$		
$\text{Y}_3 =$		
$\text{Y}_4 =$		
$\text{Y}_5 =$		
$\text{Y}_6 =$		
$\text{Y}_7 =$		
$\text{Y}_8 =$		

NORMAL FLOTT AUTO RÉEL RAD MP				
APP SUR + POUR ΔTb1				
X	Y1	Y2		
40	700	662.41		
41	710	675.66		
42	720	689.17		
43	730	702.96		
44	740	717.02		
45	750	731.36		
46	760	745.98		
47	770	760.9		
48	780	776.12		
49	790	791.64		
50	800	807.48		
X=49				

La valeur de la variable n affiché est 49.

Exercice 4* :

Dans le repère (A ; B, D), ABCD est un carré de côté 1 et BEFG est un carré d'arête a .

- Déterminer des équations cartésiennes des droites (CE), (DF) et (AG) en fonction de a .
- Démontrer qu'elles sont concourantes en un même point K dont on donnera les coordonnées.

❖ (AG) : La droite (AG) passe par les points de coordonnées $A(0 ; 0)$ et $G(1 ; a)$, l'équation réduite est donc $y = ax$

❖ (CE) : La droite (CE) passe par les points de coordonnées $C(1 ; 1)$ et $E(1 + a ; 0)$, l'équation réduite est donc

$$m = \frac{0-1}{1+a-1} = \frac{-1}{a} \quad , \text{ le point } C(1 ; 1) \text{ vérifie l'équation } y = \frac{-1}{a}x + p \Leftrightarrow 1 = \frac{-1}{a} + p$$

$$\Leftrightarrow p = \frac{1}{a} + 1 \quad \text{l'équation réduite est donc } y = \frac{-1}{a}x + \frac{1}{a} + 1$$

❖ (DF) : La droite passe par les points de coordonnées $D(0 ; 1)$ et $F(1 + a ; a)$, l'équation réduite est donc

$$m = \frac{a-1}{1+a-0} = \frac{a-1}{a+1} \quad , \text{ le point } D(0 ; 1) \text{ vérifie l'équation } y = \frac{a-1}{a+1}x + p \Leftrightarrow 1 = p$$

$$\text{l'équation réduite est donc } y = \frac{a-1}{a+1}x + 1$$

Prenons le cas où $a = 2$

$$(AG) : y = 2x \quad (CE) : y = -\frac{1}{2}x + \frac{3}{2} \quad ; \quad (DF) : y = \frac{1}{3}x + 1 \quad ;$$

$$\begin{cases} y = 2x \\ y = -\frac{1}{2}x + \frac{3}{2} \\ y = \frac{1}{3}x + 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x = -\frac{1}{2}x + \frac{3}{2} \\ y = -\frac{1}{2}x + \frac{3}{2} \\ y = \frac{1}{3}x + 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{3}{5} \\ y = -\frac{1}{2}x + \frac{3}{2} \\ y = \frac{1}{3}x + 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{3}{5} \\ y = \frac{6}{5} \\ y = \frac{1}{3}x + 1 \end{cases}$$

Le point de coordonnées est $K(\frac{3}{5} ; \frac{6}{5})$.

