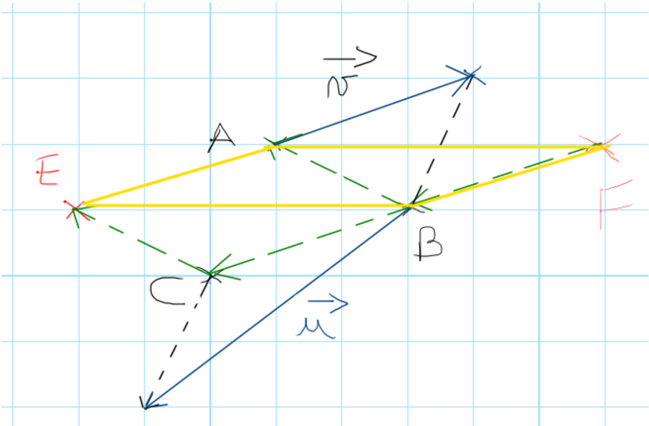
MATHS 2nd	Devoir en Temps Libre n°11	Correction

2. Placer les points E et F tels que :
$\overrightarrow{CE} = \overrightarrow{BA}$ et $\overrightarrow{FB} = \overrightarrow{BC}$



3) Le représentant du vecteur $\overrightarrow{BC}$ d'origine A est le vecteur $\overrightarrow{AE}$
Le représentant du vecteur $\overrightarrow{AB}$ d'extrémité C est le vecteur $\overrightarrow{EC}$.

$\overrightarrow{CE} = \overrightarrow{BA}$ donc CEAB est un parallélogramme , ainsi on en déduit que $\overrightarrow{AE} = \overrightarrow{BC}$, or $\overrightarrow{FB} = \overrightarrow{BC}$
On a donc $\overrightarrow{FB} = \overrightarrow{AE}$ donc AEBF est un parallélogramme.

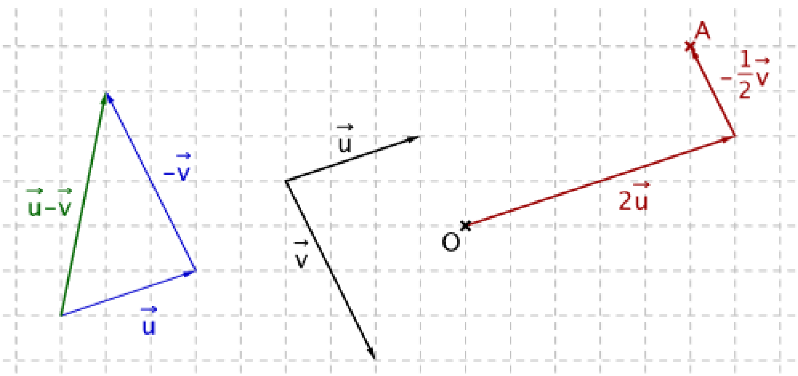
<u>Exercice 2:</u>
Simplifier au maximum l'écriture des vecteurs suivants.

$\vec{u} = \overrightarrow{HF} + \overrightarrow{SU} + \overrightarrow{RS} + \overrightarrow{UH}$; $\vec{v} = \overrightarrow{OC} - \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{AB}$

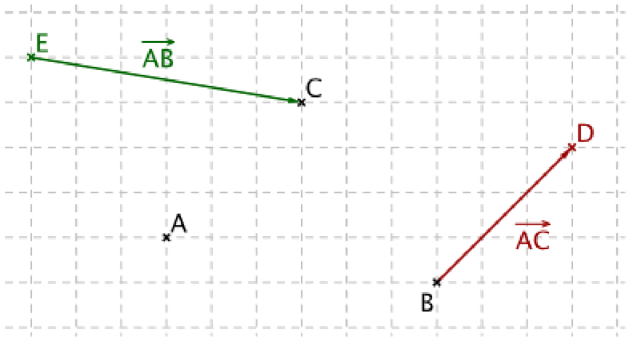
$\vec{u} = \overrightarrow{HF} + \overrightarrow{SU} + \overrightarrow{RS} + \overrightarrow{UH} = \overrightarrow{UH} + \overrightarrow{HF} + \overrightarrow{RS} + \overrightarrow{SU} = \overrightarrow{UF} + \overrightarrow{RU} = \overrightarrow{RU} + \overrightarrow{UF} = \overrightarrow{RF}$

$\vec{v} = \overrightarrow{OC} - \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{BO} + \overrightarrow{OC} + \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AC}$

<u>Exercice 3:</u>
Dans tout cet exercice, laisser les traits de construction apparents. Refaire les figures
1) Placer le point A tel que $\overrightarrow{OA} = 2\vec{u} - \frac{1}{2}\vec{v}$ puis tracer $\vec{u} - \vec{v}$.



2) Représenter les point D et E vérifiant : $\overrightarrow{BD} = \overrightarrow{AC}$ et $\overrightarrow{EC} = \overrightarrow{AB}$



3) Démonter que C est le milieu de [ED].

On sait que $\overrightarrow{BD} = \overrightarrow{AC}$, donc ABCD est parallélogramme. On en déduit donc que $\overrightarrow{CD} = \overrightarrow{AB}$

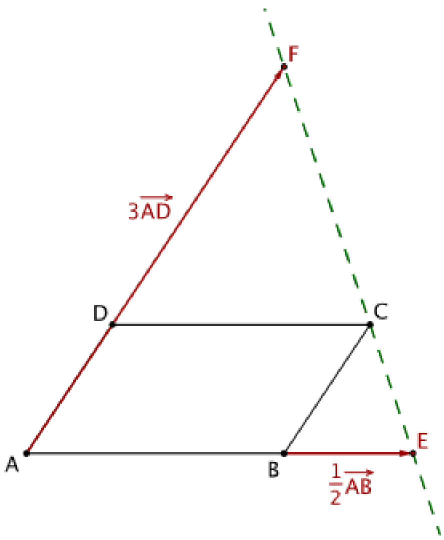
Or, $\overrightarrow{EC} = \overrightarrow{AB}$ donc $\overrightarrow{EC} = \overrightarrow{CD}$

L'égalité $\overrightarrow{EC} = \overrightarrow{CD}$ est équivalente à dire que C est le milieu de [ED]. (CQFD)

Exercice 4:

Soit ABCD un parallélogramme et E et F les points définis par $\overrightarrow{BE} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AF} = 3\overrightarrow{AD}$

a) Faire une figure et placer les points E et F.



b) Démontrer que $\overrightarrow{CE} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{DA}$ et $\overrightarrow{EF} = \frac{3}{2}\overrightarrow{BA} + 3\overrightarrow{AD}$.

D'après la relation de Chasles, on a $\overrightarrow{CE} = \overrightarrow{CB} + \overrightarrow{BE}$. Or, comme ABCD est un parallélogramme, $\overrightarrow{CB} = \overrightarrow{DA}$.

De plus, d'après l'énoncé $\overrightarrow{BE} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AB}$, on a donc : $\overrightarrow{CE} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{DA}$

D'autre part, toujours par la relation de Chasles, on a

$\overrightarrow{EF} = \overrightarrow{EA} + \overrightarrow{AF} = \overrightarrow{EB} + \overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AF}$

Or, $\overrightarrow{EB} = \frac{1}{2}\overrightarrow{BA}$ et $\overrightarrow{AF} = 3\overrightarrow{AD}$

On a donc $\overrightarrow{EF} = \frac{1}{2}\overrightarrow{BA} + \overrightarrow{BA} + 3\overrightarrow{AD} = \frac{3}{2}\overrightarrow{BA} + 3\overrightarrow{AD}$ (CQFD)

c) Exprimer $\overrightarrow{\mathrm{EF}}$ en fonction de $\overrightarrow{\mathrm{CE}}$.

On remarque que $\overrightarrow{\mathrm{EF}} = \frac{3}{2}\overrightarrow{\mathrm{BA}} + 3\overrightarrow{\mathrm{AD}} = 3\left(\frac{1}{2}\overrightarrow{\mathrm{BA}} + \overrightarrow{\mathrm{AD}}\right) = 3\left(-\frac{1}{2}\overrightarrow{\mathrm{AB}} - \overrightarrow{\mathrm{DA}}\right) = -3\overrightarrow{\mathrm{CE}}$.

Ainsi $\overrightarrow{\mathrm{EF}} = -3\overrightarrow{\mathrm{CE}}$

Exercice 5*:

A) Démontrer les égalités suivantes.

1) $\frac{1}{\sqrt{x}} = \frac{\sqrt{x}}{x}$ avec $x > 0$ 2) $\frac{1}{\sqrt{x}+5} = \frac{\sqrt{x}-5}{x-25}$ avec $x \geq 0$ et $x \neq 25$ 3) $\sqrt{n+1} - \sqrt{n} = \frac{1}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}}$ avec $n \in \mathbb{N}$

- Démontrons que : $\frac{1}{\sqrt{x}} = \frac{\sqrt{x}}{2}$.

  On a $\frac{1}{\sqrt{x}} = \frac{1\times\sqrt{x}}{\sqrt{x}\times\sqrt{x}} = \frac{\sqrt{x}}{x}$

- Démontrons que : $\frac{1}{\sqrt{x}+5} = \frac{\sqrt{x}-5}{x-25}$ avec $x \geq 0$ et $x \neq 25$

  On a $\frac{1}{\sqrt{x}+5} = \frac{\sqrt{x}-5}{(\sqrt{x}+5)\times(\sqrt{x}-5)} = \frac{\sqrt{x}-5}{\left(\sqrt{x}\right)^2-5^2} = \frac{\sqrt{x}-5}{x-25}$

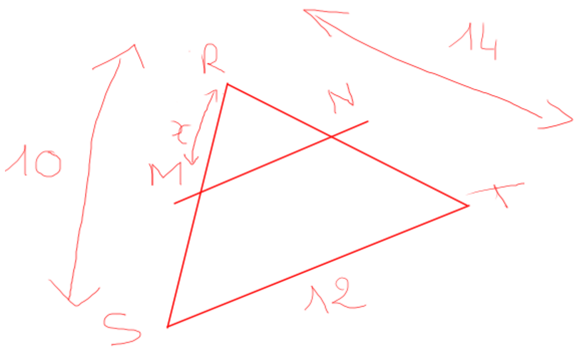
- Démontrons que : $\sqrt{n+1} - \sqrt{n} = \frac{1}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}}$ avec $n \in \mathbb{N}$

On a $\frac{1}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}} = \frac{\sqrt{n+1}-\sqrt{n}}{(\sqrt{n+1}+\sqrt{n})\times(\sqrt{n+1}-\sqrt{n})} = \frac{\sqrt{x}-5}{\left(\sqrt{n+1}\right)^2-(\sqrt{n})^2} = \frac{\sqrt{x}-5}{n+1-n} = \sqrt{n+1} - \sqrt{n}$

B) On considère un triangle RST tel que RS = 10 RT = 14 et ST = 12.
Faire une figure à main levée.
Placer un point M sur [RS]. On pose $RM = x$.
La parallèle à (ST) passant par M coupe [RT] en N.

1) Montrer que la distance RN = 1,4 x et que la distance $MN = 1{,}2\,x$.
2) En déduire que le périmètre du triangle RMN est égale à $PRMN = 3{,}6\,x$.
3) Monter que le périmètre du trapèze MSTN en fonction de x est P_{MSTN}= 36 – $1{,}2\,x$.
4) Déterminer la valeur de x pour laquelle les deux périmètres ont la même valeur.

Les droites (SM) et (TN) sont sécantes en R, de plus (MN) et (ST) sont parallèles, d'après le théorème de Thalès, on peut écrire :



$\frac{x}{10} = \frac{MN}{12} = \frac{RN}{14}$

On a $\frac{x}{10} = \frac{MN}{12}$ donc $MN = \frac{12x}{10} = 1{,}2x$

et $\frac{x}{10} = \frac{RN}{14}$ donc $RN = \frac{14x}{10} = 1{,}4x$

a) En déduire que le périmètre du triangle RMN est égale à P_{RMN} = 3,6 x.

$P_{RMN}= RM + MN + RN = x + 1{,}2x + 1{,}4\,x = 3{,}6x$

b) Monter que le périmètre du trapèze MSTN en fonction de x est P_{MSTN}= 36 – 1,2 x.

$P_{MSTN} = MS + ST + TN + MN$
$= 10 - x + 12 + 14 - 1{,}4\,x + 1{,}2\,x = 36 - 1{,}2\,x.$

c) Déterminer la valeur de x pour laquelle les deux périmètres ont la même valeur.

$P_{RMN} = P_{MSTN}$ revient à résoudre $3{,}6x = 36 - 1{,}2\,x$

$\Leftrightarrow 4{,}8x = 36$

$\Leftrightarrow x = \frac{36}{4{,}8} = 7{,}5$

Lorsque $x = 7{,}5$ le périmètre du triangle est égal au périmètre du trapèze