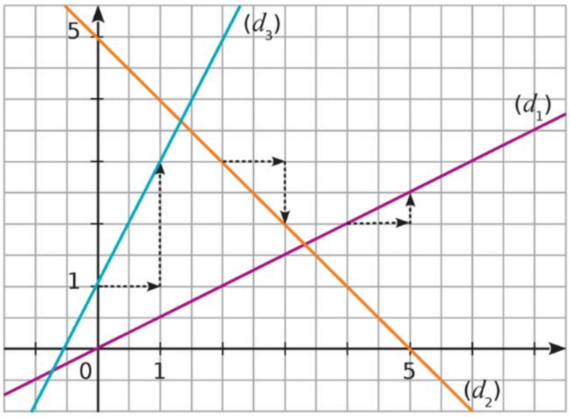
Mathématiques 1ère EDS	Devoir en **T**emps **L**ibre **n°7**	**Correction**

Exercice 1 :

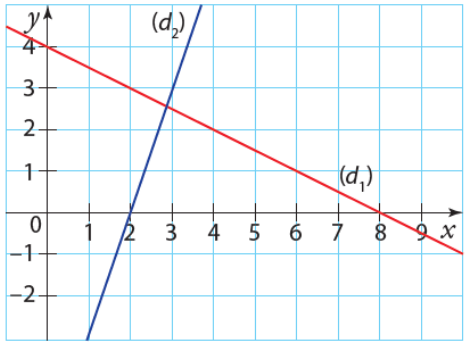
Les droites (d_1), (d_2) et (d_3) sont les représentations graphiques respectives de trois fonctions affines f_1, f_2 et f_3.
a) Indiquer le coefficient directeur de chaque droite ainsi que l'ordonnée à l'origine.



droite	d_1	d_2	d_3
coefficient directeur	$\frac{+0{,}5}{+1} = 0{,}5$	$\frac{-1}{+1} = -1$	$\frac{+2}{+1} = 2$
ordonnée à l'origine	0	5	1
Equation réduite	$y_1 = 0{,}5x$	$y_2 = -x + 5$	$y_3 = 2x + 1$

Exercice 2:

On considère les fonctions f et g définies sur $\mathbb{R}$ par :
$f(x) = 3x - 6 \quad g(x) = -0{,}5x + 4$
Les droites représentatives ont été tracées dans le repère ci-contre.
1. Associer chaque fonction à sa droite représentative.
2. Résoudre par le calcul $f(x) \geqslant 0$ et $g(x) < 0$.
3. Contrôler graphiquement les résultats de la question précédente.



La représentation graphique de la fonction $f(x)$ est la droite (d_2).
La représentation graphique de la fonction $g(x)$ est la droite (d_1).

2. Résoudre par le calcul $f(x) \geqslant 0$ et $g(x) < 0$.

$f(x) \geq 0 \Leftrightarrow 3x - 6 \geq 0$ $\Leftrightarrow 3x \geq 6$ $\Leftrightarrow \frac{3x}{3} \geq \frac{6}{3}$ $\Leftrightarrow x \geq 2$ S = $]-\infty\,;2\,]$	$g(x) < 0 \Leftrightarrow -0{,}5x + 4 < 0$ $\Leftrightarrow -0{,}5x < -4$ $\Leftrightarrow \frac{-0{,}5x}{-0{,}5} > \frac{-4}{-0{,}5}$ $\Leftrightarrow x > 8$ $S = [8\,;\,+\infty[$

3. Contrôler graphiquement les résultats de la question précédente.
Graphiquement, $f(x) \geqslant 0$ si et seulement si $x \in\,]-\infty\,;2\,]$ et $g(x) < 0$ si et seulement si $x \in [8\,;\,+\infty[$

Exercice 3 :

Déterminer dans chaque cas, une équation réduite de la droite des droites suivantes :

1) droite (d) passant par les points $A\,(\,2\,;\,-3\,)$ et $B\,(-1\,;\,12)$

<u>Méthode 1 : En calculant directement la pente et l'ordonnée à l'origine</u>
L'équation de la droite (d) est de la forme $y = mx + p$.
$m = \frac{y_B - y_A}{x_2 - x_1} = \frac{12-(-3)}{-1-2} = \frac{15}{-3} = -5$

$A(\,2\,;-3) \in (d)$ donc ses coordonnées vérifient l'équation soit $-3 = -5 \times 2 + p \Leftrightarrow p = 7$

donc l'équation de (d) est $y = -5x + 7$

<u>Méthode 2 : en passant par l'équation cartésienne</u>

Un vecteur directeur de la droite (AB) (ou d) est le vecteur $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}-1-2\\12-(-3)\end{pmatrix}$ *soit* $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}-3\\15\end{pmatrix}$.

Soit un point M (x ; y) de la droite (AB) ; on a $\overrightarrow{AM}\begin{pmatrix}x-2\\y+3\end{pmatrix}$

Le point M appartient à (AB) si et seulement si les vecteurs $\overrightarrow{AM}\begin{pmatrix}x-2\\y+3\end{pmatrix}$ *et* $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}-3\\15\end{pmatrix}$ *sont colinéaires.*

Ce qui équivaut à $\det(\overrightarrow{AM}\,;\overrightarrow{AB})=0 \iff 15(x-2)-(-3)(y+3)=0$

$\iff 15x-30+3y+9=0$

$\iff 15x+3y-21=0 \iff 5x+y-7=0$

Une équation cartésienne de la droite (AB) *est donc :* $5x+y-7=0$

Son équation réduite est $y=-5x+7$

2) droite (d') passant par le point $C\,(-1\,;\,1)$ et de vecteur directeur $\vec{u}\,(3\,;2)$

Méthode 1 : pente et vecteur directeur

$\vec{v}=\frac{1}{3}\vec{u}$, c'est-à-dire $\vec{v}\left(1;\frac{2}{3}\right)$ est aussi un vecteur directeur de (d').

$\mathrm{C}(-1\,;1)\in(d')$ donc $1=-1\times\frac{2}{3}+p$ et $p=\frac{5}{3}$.

L'équation réduite de d est $y=\frac{2}{3}x+\frac{5}{3}$

Méthode 2 : en passant par l'équation cartésienne

M (x ; y) ϵ d' $\iff \overrightarrow{CM}\begin{pmatrix}x+1\\y-1\end{pmatrix}$ *et* $\vec{u}\begin{pmatrix}3\\2\end{pmatrix}$ *colinéaires*

$\iff 2(x+1)-3(y-1)=0 \iff 2x+2-3y+3=0$

$\iff 2x-3y+5=0$

Une équation cartésienne de la droite d est : $2x-3y+5=0$

Son équation réduite est $y=\frac{2}{3}x+\frac{5}{3}$

3) droite (d'') passant par le point $D\,(1\,;\,-1)$ et de coefficient directeur (ou pente) $m=\frac{-2}{3}$

L'équation de la droite (d'') est de la forme $y=\frac{-2}{3}x+p$

Avec $D(1\,;-1)\in(d'')$ donc ses coordonnées vérifient l'équation soit

$-1=\frac{-2}{3}\times 1+p \iff p=-1+\frac{2}{3}=\frac{-1}{3}$ donc l'équation de d'' est $y=\frac{-2}{3}x-\frac{1}{3}$

Exercice 4:

1) Observer le tableau de signe ci-contre, puis écrire l'ensemble des solutions de chaque inéquation.

x	$-\infty$		-1		3		$+\infty$
$x+1$		$-$	0	$+$		$+$	
$x-3$		$-$		$-$	0	$+$	
$\frac{x+1}{x-3}$		$+$	0	$-$	‖	$+$	

$\frac{x+1}{x-3}\leq 0$ $\quad S=[-1\,;3[$

$\frac{x+1}{x-3}>0$ $\quad$ S = $]-\infty\,;-1[\cup\,]3;+\infty[$

2) Compléter le tableau de signes ci-dessous sans oublier les zéros.

x	$-\infty$		-4		3		$+\infty$
$x+4$		$-$	0	$+$		$+$	
$x-3$		$-$		$-$	0	$+$	
$(x+4)(x-3)$		$+$	0	$-$	0	$+$	

En déduire l'ensemble des solutions dans $\mathbb{R}$ de l'inéquation $(x+4)(x-3)\leq 0$ $\quad S=[-4\,;3]$

Exercice 5:

1) Résoudre les inéquations dans $\mathbb{R}$

a) $6x - 9 \geq 2x + 13$	b) $x + 3 < -7x - 2$	c) $2(5 - x) \geq -2x + 4$
$\Leftrightarrow 4x - 9 \geq 13$ $\Leftrightarrow 4x \geq 22$ $\Leftrightarrow \frac{4x}{4} \geq \frac{22}{4}$ $\Leftrightarrow x \geq 5{,}5$ $S = [5{,}5\ ;\ +\infty[$	$\Leftrightarrow 8x + 3 < -2$ $\Leftrightarrow 8x < -5$ $\Leftrightarrow \frac{8x}{8} < \frac{-5}{8}$ $\Leftrightarrow x < \frac{-5}{8}$ S = $]-\infty\,; \frac{-5}{8}\ [$	$\Leftrightarrow 10 - 2x \geq -2x + 4$ $\Leftrightarrow 10 \geq 4$ Cette inégalité est vraie pour tout nombre réel, donc $S = \mathbb{R}$

2) Résoudre $(2x + 6)(3x + 5) \geq 0$ dans $\mathbb{R}$

On résout :

$2x + 6 \geq 0 \quad \Leftrightarrow \quad 2x \geq -6 \quad \Leftrightarrow \quad \frac{2x}{2} \geq \frac{-6}{2} \quad \Leftrightarrow \quad x \geq -3$

$3x + 5 \geq 0 \quad \Leftrightarrow \quad 3x \geq -5 \quad \Leftrightarrow \quad \frac{3x}{3} \geq \frac{-5}{3} \quad \Leftrightarrow \quad x \geq \frac{-5}{3}$

On obtient le tableau de signe suivant :

x	$-\infty$		-3		$\frac{-5}{3}$		$+\infty$
$2x + 6$		$-$	0	$+$		$+$	
$3x + 5$		$-$		$-$	0	$+$	
$(2x + 6)(3x + 5)$		$+$	0	$-$	0	$+$	

L'ensemble des solutions de l'inéquation

$(2x + 6)(3x + 5) \geq 0$ est donc

S = $]-\infty\,; -3] \cup [\frac{-5}{3}; +\infty[$

Résoudre $(2 - x)(10x - 5) \geq 0$ dans $\mathbb{R}$

On résout :

$2 - x \geq 0 \quad \Leftrightarrow \quad 2 \geq x \quad \Leftrightarrow \quad x \leq 2$

$10x - 5 \geq 0 \quad \Leftrightarrow \quad 10x \geq 5 \quad \Leftrightarrow \quad \frac{10x}{10} \geq \frac{5}{10} \quad \Leftrightarrow \quad x \geq 0{,}5$

On obtient le tableau de signe suivant :

x	$-\infty$		$0{,}5$		2		$+\infty$
$2 - x$		$+$		$+$	0	$-$	
$10x - 5$		$-$	0	$+$		$+$	
$(2 - x)(10x - 5)$		$-$	0	$+$	0	$-$	

L'ensemble des solutions de l'inéquation

$(2 - x)(10x - 5) \geq 0$ est donc

S = $[0{,}5; 2]$

3) Résoudre les inéquations dans $\mathbb{R}$ (Au préalable, pensez à déterminer l'ensemble de résolubilité)

- Résoudre l'inéquation $\frac{4x+12}{1+x} > 0$ dans $\mathbb{R}$

Le quotient existe si et seulement si le dénominateur est non nul , c'est-à-dire lorque $1 + x \neq 0 \Leftrightarrow x \neq -1$ donc le quotient est défini sur $\mathbb{R} - \{-1\}$, on résout donc l'inéquation dans $\mathbb{R} - \{-1\}$.

On résout :

$4x + 12 \geq 0 \quad \Leftrightarrow \quad 4x \geq -12 \quad \Leftrightarrow \quad \frac{4x}{4} \geq \frac{-12}{4} \quad \Leftrightarrow \quad x \geq -3$

$1 + x \geq 0 \quad \Leftrightarrow x \geq -1$

On obtient le tableau de signe suivant :

x	$-\infty$		-3		-1		$+\infty$
$4x+12$		$-$	0	$+$		$+$	
$1+x$		$-$		$-$	0	$+$	
$\dfrac{4x+12}{1+x}$		$+$	0	$-$	$\|\|$	$+$	

L'ensemble des solutions de l'inéquation $\frac{4x+12}{1+x} > 0$ est donc

$S =]-\infty\,;-3[\,\cup\,]-1;+\infty[$

❖ Résoudre l'inéquation $\frac{-3+2x}{1-4x} \geq 0$ dans $\mathbb{R}$

Le quotient existe si et seulement si le dénominateur est non nul , c'est-à-dire lorque $1-4x \neq 0 \Leftrightarrow -4x \neq -1 \Leftrightarrow x \neq \frac{1}{4}$ donc le quotient est défini sur $\mathbb{R}-\left\{\frac{1}{4}\right\}$, on résout donc l'inéquation dans $\mathbb{R}-\left\{\frac{1}{4}\right\}$

On résout :

$-3+2x \geq 0 \quad \Leftrightarrow \quad 2x \geq 3 \quad \Leftrightarrow \quad \frac{2x}{2} \geq \frac{3}{2} \quad \Leftrightarrow \quad x \geq 1{,}5$

$1-4x \geq 0 \quad \Leftrightarrow \quad 1 \geq 4x \quad \Leftrightarrow \quad \frac{1}{4} \geq \frac{4x}{4} \quad \Leftrightarrow \quad \frac{1}{4} \geq x \quad \Leftrightarrow \quad x \leq 0{,}25.$

On obtient le tableau de signe suivant :

x	$-\infty$		$0{,}25$		$1{,}5$		$+\infty$
$-3+2x$		$-$		$-$	0	$+$	
$1-4x$		$+$	0	$-$		$-$	
$\dfrac{-3+2x}{1-4x}$		$-$	$\|\|$	$+$	0	$-$	

L'ensemble des solutions de l'inéquation $\frac{-3+2x}{1-4x} \geq 0$ est donc

$S =]0{,}25\,;1{,}5]$