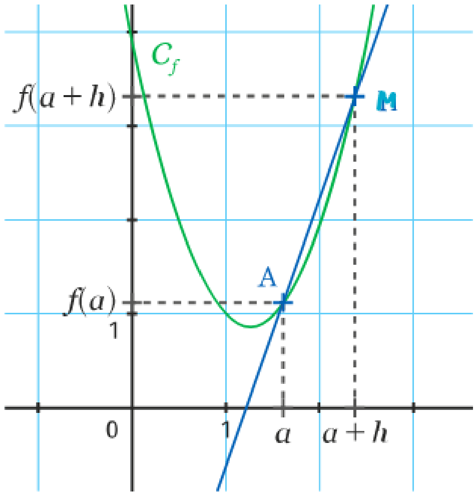
Mathématiques 1ère EDS	<u>Chapitre 5 :</u> La dérivation (1ère partie)	Analyse

I – Nombre dérivé et tangente :

Soit f une fonction définie sur un intervalle I, $\mathcal{C}$ sa représentation graphique dans un repère du plan ;
a un réel de I et A le point de $\mathcal{C}$ d'abscisse a.

a) Taux de variation et nombre dérivé :



❖ **Définitions**

Soit h un réel non nul tel que $a+h$ appartient à I.
Soit $M(a+h\,;f(a+h))$ un point de $\mathcal{C}$.

Le **taux de variation** de la fonction f entre a et $a+h$ (avec $h \neq 0$) est égal au rapport :

$$\frac{f(a+h)-f(a)}{a+h-a} = \frac{\boldsymbol{f(a+h)-f(a)}}{\boldsymbol{h}}$$

Ce nombre est la pente de la droite (AM), **sécante** à C passant par les points A et M.

> Si le **taux de variation** de la fonction f tend vers un nombre réel ($\pm\infty$ exclu) quand h tend vers 0, on dit que f est dérivable en a. Ce nombre est appelé **nombre dérivé** de f en a , et est noté $\boldsymbol{f'(a)}$. On écrit :
>
> $$\boldsymbol{f'(a) = \lim_{h\to 0}\frac{f(a+h)-f(a)}{h}}$$

❖ **Exemple :**

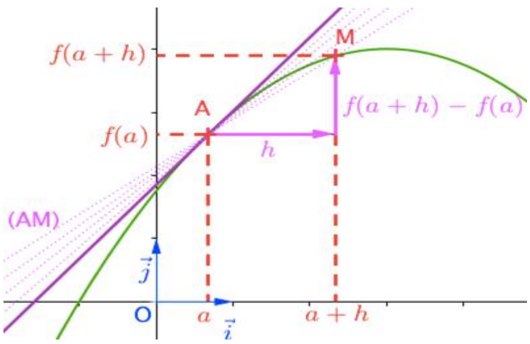
Soit f telle que $f(x)=x^2$,avec x réel. On veut savoir si f est dérivable en 1.

❖ **Remarques :**

En physique, lorsque $y=f(x)$, le taux de variation est noté $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ et le nombre dérivé $f'(x)$ est noté $\frac{dy}{dx}$.

b) Tangente à une courbe en un point :

Graphiquement, lorsque h tend vers 0, le point M de C_f se rapproche du point A. Dire que le taux de variation a pour limite $f'(a)$ quand h tend vers 0 revient donc à dire que la pente de (AM) tend vers $f'(a)$ quand M se rapproche de A.

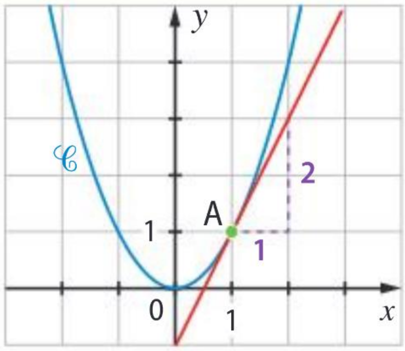


> On suppose que la fonction f est dérivable en a.
>
> **La tangente T à la courbe représentative $\boldsymbol{C_f}$ de la fonction $\boldsymbol{f}$ au point A** d'abscisse a est la droite qui passe par A et de pente $f'(a)$;
>
> La tangente T a pour équation : $\boldsymbol{y = f'(a)(x-a)+f(a)}$

❖ **Démonstration au programme :**

❖ **Exercice 1 : Déterminer l'équation d'une tangente en un point**

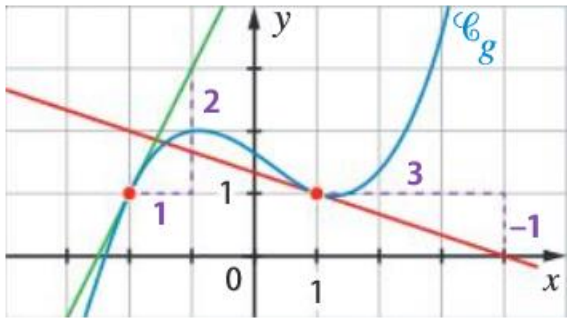
Déterminer l'équation de la tangente C_f au point d'abscisse 1.



❖ **Exercice 2: Déterminer graphiquement un nombre dérivé :**

g est une fonction définie sur $\mathbb{R}$.

On a tracé ci-contre la courbe représentative C_g de la fonction g ainsi que ses tangentes aux points d'abscisses -2 et 1.
1) Déterminer graphiquement le nombre de g en -2.
2) Déterminer graphiquement $g'(1)$



II – Dérivées des fonctions usuelles :

☐ **Définition :**
Soit *f* une fonction définie sur un intervalle I. Dire que ***f* est dérivable sur I** signifie que f est dérivable en tout réel x de I. La fonction qui à tout réel x de I associe le nombre dérivé de *f* en x est appelée fonction dérivée de *f* et se note *f* '. Ainsi, f' : $x \mapsto f'(x)$

❖ **Démonstration au programme :**

a et h désignent deux nombres réels avec $h \neq 0$.

- Fonction carré

$$\frac{f(a+h)-f(a)}{h} = \frac{(a+h)^2-a^2}{h} = \frac{a^2+2ah+h^2-a^2}{h} = \frac{h(2a+h)}{h} = 2a+h$$

donc : $\lim\limits_{h\to 0} \frac{f(a+h)-f(a)}{h} = \lim\limits_{h\to 0} 2a+h = 2a$ qui est bien une valeur réelle unique

donc *f* est dérivable sur $\mathbb{R}$ et on a pour tout *x* de $\mathbb{R}$, $f'(x) = 2x$

- Fonction inverse

Pour $a \neq 0$ et $a + h \neq 0$:

$$\frac{f(a+h)-f(a)}{h} = \frac{\frac{1}{a+h}-\frac{1}{a}}{h} = \frac{\frac{a-a-h}{a(a+h)}}{h} = \frac{\frac{-h}{a(a+h)}}{h} = -\frac{1}{a(a+h)}$$

donc : $\lim\limits_{h\to 0}\frac{f(a+h)-f(a)}{h} = \lim\limits_{h\to 0}\left(-\frac{1}{a(a+h)}\right) = -\frac{1}{a^2}$ qui est bien une valeur réelle unique

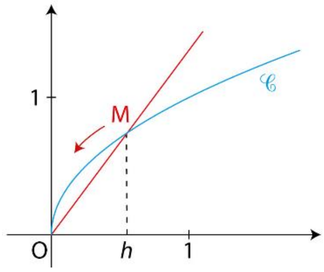
ainsi, pour tout x de $\mathbb{R}\backslash\{0\}$, on a : $f'(x) = -\frac{1}{x^2}$.

On admettra les autres résultats donnés dans le tableau ci-dessous.

❖ **Remarque :** La fonction racine carrée n'est pas dérivable en 0.

En effet, pour $h \neq 0$, on a :

$$\lim_{h\to 0}\frac{f(0+h)-f(0)}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{\sqrt{h}-\sqrt{0}}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{\sqrt{h}}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{\sqrt{h}}{h}\times\frac{\sqrt{h}}{\sqrt{h}} = \lim_{h\to 0}\frac{h}{h\sqrt{h}} = \lim_{h\to 0}\frac{1}{\sqrt{h}} = +\infty$$



$\lim\limits_{h\to 0}\frac{f(0+h)-f(0)}{h}$ n'est pas égale à une valeur réelle car elle est infinie donc la fonction racine carrée n'est pas dérivable 0. Graphiquement, la sécante (OM) a pour « position limite » l'axe des ordonnées lorsque h tend vers 0.

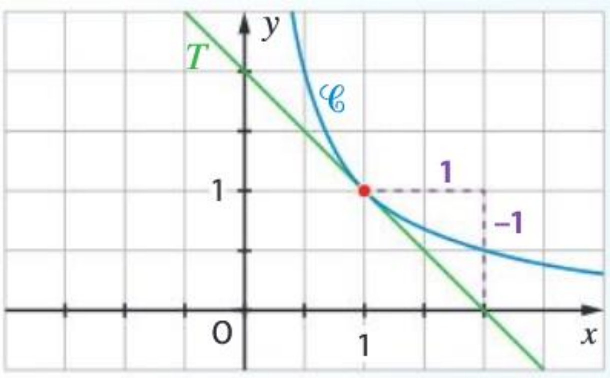
☐ **Propriétés : Dérivée des fonctions de références**

Fonction	Dérivée	Domaine de définition	Domaine de dérivabilité
k	0	$\mathbb{R}$	$\mathbb{R}$
ax	a	$\mathbb{R}$	$\mathbb{R}$
x^2	$2x$	$\mathbb{R}$	$\mathbb{R}$
x^n	nx^{n-1}	$\mathbb{R}$ si n$\geq$ 1 et $\mathbb{R}^*$ si n$\leq$ 1	$\mathbb{R}$ si n$\geq$ 1 et $\mathbb{R}^*$ si n$\leq$ 1
$\sqrt{x}$	$\frac{1}{2\sqrt{x}}$	$[0;+\infty[$	$]0;+\infty[$
$\frac{1}{x}$	$\frac{-1}{x^2}$	$\mathbb{R}^*$	$\mathbb{R}^*$

❖ **Exercice 1 : Utiliser les dérivées des fonctions usuelles :**

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}*$ par $f(x) = \frac{1}{x}$.

1. Donner l'expression de la dérivée de la fonction f pour $x \neq 0$, puis calculer $f'(1)$.
2. Dans un repère orthonormé, C_f est la courbe représentative de la fonction f. Déterminer une équation de la tangente à la courbe au point d'abscisse 1.
3. Tracer la courbe C_f et sa tangente T.
4. Existe-t-il une tangente T à C_f parallèle à la droite d d'équation y=-x+3 ? Si oui, déterminer les coordonnées du point de contact entre C_f et T .



III – Opérations sur les fonctions dérivables :

u et v sont deux fonctions dérivables sur un intervalle I de $\mathbb{R}$	
Dérivée	**Domaine de dérivabilité**
$(ku)' = ku'$	Le produit d'une fonction par un réel ku est dérivable sur I
$(u+v)' = u' + v'$	La fonction somme $u + v$ est dérivable sur I
$(uv)' = u'v + uv'$	La fonction produit uv est dérivable sur I
$\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{vu' - uv'}{v^2}$	La fonction quotient $\frac{u}{v}$ (v ne s'annulant pas sur I) est dérivable sur I
$(u^2)' = 2uu'$	Carré u^2 (cas particulier du produit) est dérivable sur I
$\left(\frac{1}{u}\right)' = \frac{-u'}{u^2}$	Inverse $\frac{1}{u}$ u ne s'annulant pas sur I (CP du quotient) $\frac{1}{u}$ est dérivable sur I
$(f(ax+b))' = af'(ax+b)$ f dérivable sur J ($x \in I$ et $(ax+b) \in J$)	La fonction composée $f(ax+b)$ est dérivable sur I.

❖ **Démonstration au programme :**

a et $a+h$ désignent deux nombres réels de I avec $h \neq 0$.

- **Fonction uv :**

$$\frac{(uv)(a+h)-(uv)(a)}{h} = \frac{u(a+h)v(a+h)-u(a)v(a)}{h} = \frac{u(a+h)v(a+h)-u(a)v(a+h)+u(a)v(a+h)-u(a)v(a)}{h}$$

$$= \frac{(u(a+h)-u(a))v(a+h)+u(a)\big(v(a+h)-v(a)\big)}{h}$$

$$= \frac{u(a+h)-u(a)}{h} v(a+h) + u(a)\frac{v(a+h)-v(a)}{h}$$

En passant à la limite lorsque *h* tend vers 0, on a : $\lim\limits_{h\to 0} \frac{u(a+h)-u(a)}{h} = u'(a)$ et $\lim\limits_{h\to 0} \frac{v(a+h)-v(a)}{h} = v'(a)$

Car *u* et *v* sont dérivables sur I.

Et, $\lim\limits_{h\to 0} v(a+h) = v(a)$. Soit, $\lim\limits_{h\to 0} \frac{(uv)(a+h)-(uv)(a)}{h} = u'(a)v(a) + u(a)v'(a)$

Ainsi : $(\boldsymbol{uv})' = \boldsymbol{u'v} + \boldsymbol{uv'}$

On admettra les autres résultats.

❖ **Exercice 1 : Calculer la dérivée d'un polynôme, d'un produit :**

Pour chaque fonction, donner son domaine de dérivabilité et sa fonction dérivée.
On écrira l'expression de la fonction dérivée sous forme factorisée autant que possible

1) f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = 4x^3 - 5x^2 + 2x - 1$.
2) g définie sur $\mathbb{R}^+$ par $g(x) = (x^2 + 7x)\sqrt{x}$

❖ **Exercice 2 : Calculer la dérivée d'un quotient, d'une fonction composée :**

1) Pour chaque fonction, donner son domaine de dérivabilité et sa fonction dérivée.
   a. h définie sur $\mathbb{R}$ par $h(x) = \frac{1}{5x-3}$
   b. j définie sur $\mathbb{R}^+$ par $j(x) = \frac{x^2-2x+3}{7-x}$
2) On considère la fonction k définie par $k(x) = \sqrt{3x - 6}$
   a. Donner son domaine de définition puis son domaine de dérivabilité.
   b. Déterminer sa fonction dérivée.