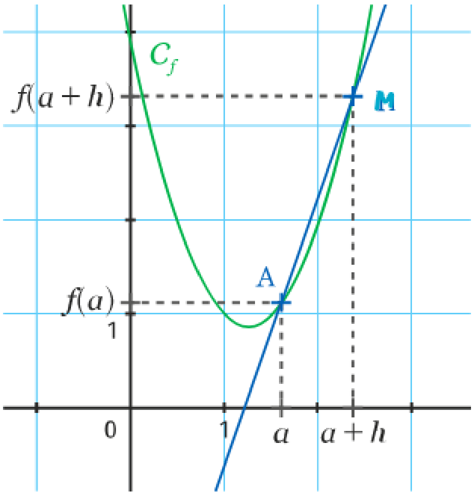
I – Nombre dérivé et tangente :

Soit f une fonction définie sur un intervalle I, $\mathcal{C}$ sa représentation graphique dans un repère du plan ;
a un réel de I et A le point de $\mathcal{C}$ d'abscisse a.

a) Taux de variation et nombre dérivé :



❖ **Définitions**

Soit h un réel non nul tel que $a+h$ appartient à I.
Soit $M(a+h\,;f(a+h))$ un point de $\mathcal{C}$.

Le **taux de variation** de la fonction f entre a et $a+h$ (avec $h \neq 0$) est égal au rapport :

$$\frac{f(a+h)-f(a)}{a+h-a}=\frac{\boldsymbol{f(a+h)-f(a)}}{\boldsymbol{h}}$$

Ce nombre est la pente de la droite (AM), **sécante** à C passant par les points A et M.

Si le **taux de variation** de la fonction f tend vers un nombre réel ($\pm\infty$ exclu) quand h tend vers 0, on dit que f est dérivable en a. Ce nombre est appelé **nombre dérivé** de f en a , et est noté $\boldsymbol{f'(a)}$. On écrit :

$$\boldsymbol{f'(a)=\lim_{h\to 0}\frac{f(a+h)-f(a)}{h}}$$

❖ **Exemple :**

Soit f telle que $f(x)=x^2$,avec x réel. On veut savoir si f est dérivable en 1.

On calcule le taux de variation de f entre $1+h$ (avec $h\neq 0$) :

$$\frac{f(1+h)-f(1)}{h}=\frac{(1+h)^2-1^2}{h}=\frac{1^2+2h+h^2-1^2}{h}=\frac{h(2+h)}{h}=2+h$$

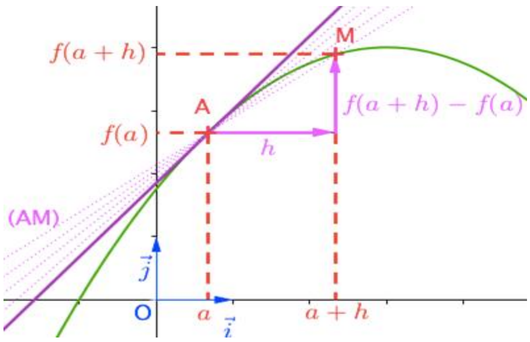
Le taux de variation $2+h$ a pour limite 2 lorsque h tend vers 0 donc la fonction f est dérivable en 1 et $f'(1)=2$.

❖ **Remarques :**

En physique, lorsque $y=f(x)$, le taux de variation est noté $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ et le nombre dérivé $f'(x)$ est noté $\frac{dy}{dx}$.

b) Tangente à une courbe en un point :

Graphiquement, lorsque h tend vers 0, le point M de C_f se rapproche du point A. Dire que le taux de variation a pour limite $f'(a)$ quand h tend vers 0 revient donc à dire que la pente de (AM) tend vers $f'(a)$ quand M se rapproche de A.



On suppose que la fonction f est dérivable en a.

La tangente T à la courbe représentative C_f de la fonction f au point A d'abscisse a est la droite qui passe par A et de pente $f'(a)$;

La tangente T a pour équation : $\boldsymbol{y=f'(a)(x-a)+f(a)}$

❖ **<u>Démonstration au programme :</u>**

L'équation de la tangente est de la forme $y = mx + p$ avec $m = f'(a)$

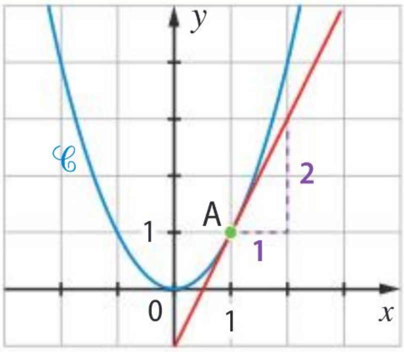
d'où $y = f'(a)x + p$

or $A \in C_f$ donc les coordonnées du point vérifient l'équation de la tangente :

$y_A = f'(a)x_A + p \quad \Leftrightarrow \quad f(a) = f'(a) \times a + p \ \Leftrightarrow \ p = f(a) - af'(a)$

D'où $y = f'(a)x + f(a) - af'(a) \ \Leftrightarrow \ y = f'(a)(x - a) + f(a)$

❖ **<u>Exercice 1 : Déterminer l'équation d'une tangente en un point</u>**



Déterminer l'équation de la tangente C_f au point d'abscisse 1.

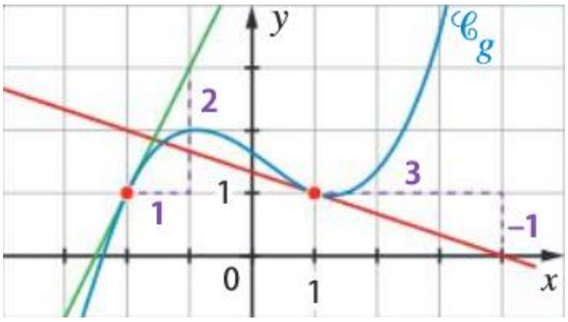
A modifier prendre une autre valeur que 1 trop redondant

.On a montré que la fonction carrée est dérivable en 1 et que $f'(1) = 2$. De plus, $f(1) = 1^2 = 1$.

Donc la tangente à C_f au point d'abscisse 1 a pour équation :

$y = f'(1)(x - 1) + f(1) \Leftrightarrow y = 2(x - 1) + 1 \Leftrightarrow y = 2x - 1$

❖ **<u>Exercice 2: Déterminer graphiquement un nombre dérivé :</u>**



g est une fonction définie sur $\mathbb{R}$.

On a tracé ci-contre la courbe représentative C_g de la fonction g ainsi que ses tangentes aux points d'abscisses -2 et 1.

1) Déterminer graphiquement le nombre de g en -2.

2) Déterminer graphiquement $g'(1)$

1) Le nombre dérivé de g en -2 est la pente de la tangente à C_g au point d'abscisse -2.

La pente de cette tangente est égale à 2, donc nombre dérivé de g en -2 est 2.

2) La pente de la tangente à C_g au point d'abscisse 1 est égale à $\frac{-1}{3}$ donc $g'(1) = -\frac{1}{3}$. Remarque : en cas de doute, on peut calculer la pente avec la formule :$\frac{y_B - y_A}{x_B - x_A}$ en choisissant deux points A et B.

<u>II – Dérivées des fonctions usuelles :</u>

☐ **<u>Définition :</u>**

Soit *f* une fonction définie sur un intervalle I.

Dire que ***f* est dérivable sur I** signifie que f est dérivable en tout réel x de I.

La fonction qui à tout réel x de I associe le nombre dérivé de *f* en x est appelée fonction dérivée de *f* et se note *f* '. Ainsi, f' : $x \mapsto f'(x)$

❖ **<u>Démonstration au programme :</u>**

a et h désignent deux nombres réels avec $h \neq 0$.

- <u>Fonction carré</u>

$\frac{f(a+h)-f(a)}{h} = \frac{(a+h)^2-a^2}{h} = \frac{a^2+2ah+h^2-a^2}{h} = \frac{h(2a+h)}{h} = 2a + h$

donc : $\lim\limits_{h\to 0} \frac{f(a+h)-f(a)}{h} = \lim\limits_{h\to 0} 2a + h = 2a$ qui est bien une valeur réelle unique

donc *f* est dérivable sur $\mathbb{R}$ et on a pour tout *x* de $\mathbb{R}$, $f'(x) = 2x$

- Fonction inverse

Pour $a \neq 0$ et $a+h \neq 0$:

$\frac{f(a+h)-f(a)}{h} = \frac{\frac{1}{a+h}-\frac{1}{a}}{h} = \frac{\frac{a-a-h}{a(a+h)}}{h} = \frac{\frac{-h}{a(a+h)}}{h} = -\frac{1}{a(a+h)}$

donc : $\lim_{h\to 0}\frac{f(a+h)-f(a)}{h} = \lim_{h\to 0}\left(-\frac{1}{a(a+h)}\right) = -\frac{1}{a^2}$ qui est bien une valeur réelle unique

ainsi, pour tout x de $\mathbb{R}\backslash\{0\}$, on a : $f'(x) = -\frac{1}{x^2}$.

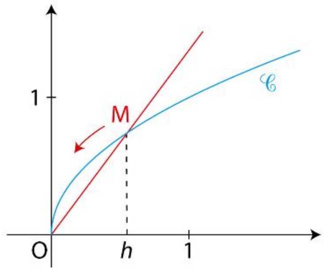
On admettra les autres résultats donnés dans le tableau ci-dessous.

❖ **Remarque :** La fonction racine carrée n'est pas dérivable en 0.

En effet, pour $h \neq 0$, on a :

$$\lim_{h\to 0}\frac{f(0+h)-f(0)}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{\sqrt{h}-\sqrt{0}}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{\sqrt{h}}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{\sqrt{h}}{h}\times\frac{\sqrt{h}}{\sqrt{h}} = \lim_{h\to 0}\frac{h}{h\sqrt{h}} = \lim_{h\to 0}\frac{1}{\sqrt{h}} = +\infty$$

$\lim_{h\to 0}\frac{f(0+h)-f(0)}{h}$ n'est pas égale à une valeur réelle car elle est infinie donc la fonction racine carrée n'est pas dérivable 0. Graphiquement, la sécante (OM) a pour « position limite » l'axe des ordonnées lorsque h tend vers 0.



☐ **Propriétés : Dérivée des fonctions de références**			
Fonction	**Dérivée**	**Domaine de définition**	**Domaine de dérivabilité**
k	0	$\mathbb{R}$	$\mathbb{R}$
ax	a	$\mathbb{R}$	$\mathbb{R}$
x^2	$2x$	$\mathbb{R}$	$\mathbb{R}$
x^n	nx^{n-1}	$\mathbb{R}$ si n≥ 1 et $\mathbb{R}$* si n≤ 1	$\mathbb{R}$ si n≥ 1 et $\mathbb{R}$* si n≤ 1
$\sqrt{x}$	$\frac{1}{2\sqrt{x}}$	$[0;+\infty[$	$]0;+\infty[$
$\frac{1}{x}$	$\frac{-1}{x^2}$	$\mathbb{R}$*	$\mathbb{R}$*

❖ **Exercice 1 : Utiliser les dérivées des fonctions usuelles :**

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}*$ par $f(x) = \frac{1}{x}$.

1. Donner l'expression de la dérivée de la fonction f pour $x \neq 0$, puis calculer $f'(1)$.
2. Dans un repère orthonormé, C_f est la courbe représentative de la fonction f. Déterminer une équation de la tangente à la courbe au point d'abscisse 1.
3. Tracer la courbe C_f et sa tangente T.
4. Existe-t-il une tangente T à C_f parallèle à la droite d d'équation y=-x+3 ? Si oui, déterminer les coordonnées du point de contact entre C_f et T .

1. f est dérivable sur $\mathbb{R}*$ et $f'(x) = -\frac{1}{x}$.

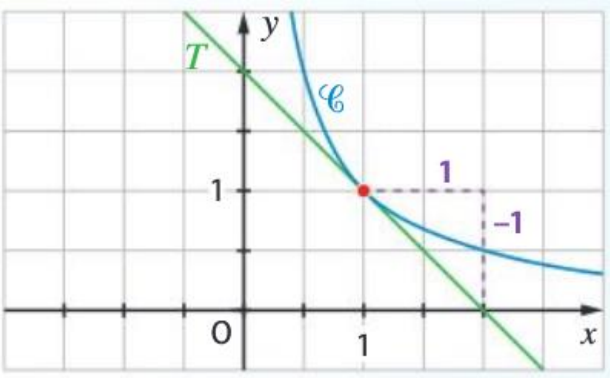
Ainsi $f'(1) = -\frac{1}{1} = -1$.

2. On a $f'(1) = 1$ et d'autre part $f(1) = \frac{1}{1} = 1$.

Une équation de la tangente à la courbe C_f au point A est :

$y = f'(1)(x-1)+f(1) \Leftrightarrow y = -(x-1)+1 \Leftrightarrow y = -x+2$

3. Pour tracer la tangente on choisit deux points de cette droite par exemple (1 ;1) et (0 ;2)



4. Une tangente au point d'abscisse a est parallèle à la droite d si, et seulement si, sa pente est égale à -1.
Ce qui équivaut à $f'(a) = -1 \Leftrightarrow -\frac{1}{a^2} = -1 \Leftrightarrow a^2 = 1 \Leftrightarrow a = 1$ ou $a = -1$.
Il existe donc deux tangentes à la courbe C_f parallèles à d.
L'une a pour point de contact le point $A(-1\,; f(-1)) = (-1; -1)$ et l'autre a pour point de contact $B(1\,; f(1)) = (1; 1)$.

<u>III – Opérations sur les fonctions dérivables :</u>

u et v sont deux fonctions dérivables sur un intervalle I de $\mathbb{R}$	
Dérivée	**Domaine de dérivabilité**
$(ku)' = ku'$	Le produit d'une fonction par un réel ku est dérivable sur I
$(u+v)' = u' + v'$	La fonction somme $u + v$ est dérivable sur I
$(uv)' = u'v + uv'$	La fonction produit uv est dérivable sur I
$\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'v - uv'}{v^2}$	La fonction quotient $\frac{u}{v}$ (v ne s'annulant pas sur I) est dérivable sur I
$(u^2)' = 2u'u$	Carré u^2 (cas particulier du produit) est dérivable sur I
$\left(\frac{1}{u}\right)' = \frac{-u'}{u^2}$	Inverse $\frac{1}{u}$ u ne s'annulant pas sur I (CP du quotient) $\frac{1}{u}$ est dérivable sur I
$(f(ax+b))' = af'(ax+b)$ f dérivable sur J ($x \in I$ et $(ax+b) \in J$)	La fonction composée $f(ax+b)$ est dérivable sur I.

❖ **<u>Démonstration au programme :</u>**

a et $a + h$ désignent deux nombres réels de I avec $h \neq 0$.

- **<u>Fonction uv :</u>**

$$\frac{(uv)(a+h)-(uv)(a)}{h} = \frac{u(a+h)v(a+h)-u(a)v(a)}{h} = \frac{u(a+h)v(a+h)-u(a)v(a+h)+u(a)v(a+h)-u(a)v(a)}{h}$$
$$= \frac{(u(a+h)-u(a))v(a+h)+u(a)\big(v(a+h)-v(a)\big)}{h}$$
$$= \frac{u(a+h)-u(a)}{h} v(a+h) + u(a)\frac{v(a+h)-v(a)}{h}$$

En passant à la limite lorsque *h* tend vers 0, on a : $\lim\limits_{h\to 0} \frac{u(a+h)-u(a)}{h} = u'(a)$ et $\lim\limits_{h\to 0} \frac{v(a+h)-v(a)}{h} = v'(a)$

Car *u* et *v* sont dérivables sur I.

Et, $\lim\limits_{h\to 0} v(a+h) = v(a)$. Soit, $\lim\limits_{h\to 0} \frac{(uv)(a+h)-(uv)(a)}{h} = u'(a)v(a) + u(a)v'(a)$

Ainsi : $(\boldsymbol{uv})' = \boldsymbol{u'v} + \boldsymbol{uv'}$

On admettra les autres résultats.

❖ Exercice 1 : Calculer la dérivée d'un polynôme, d'un produit :

Pour chaque fonction, donner son domaine de dérivabilité et sa fonction dérivée.
On écrira l'expression de la fonction dérivée sous forme factorisée autant que possible
1) f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = 4x^3 - 5x^2 + 2x - 1$.
2) g définie sur $\mathbb{R}^+$ par $g(x) = (x^2 + 7x)\sqrt{x}$

1. f est dérivable sur $\mathbb{R}$ (somme des fonctions $x \mapsto 4x^3$, $x \mapsto -5x^2$, $x \mapsto 2x$, $x \mapsto -1$ dérivables sur $\mathbb{R}$) et pour tout nombre réel x, $f'(x) = 4 \times 3x^2 - 5 \times 2x + 2 \times 1$

$$\text{soit } f'(x) = 12x^2 - 10x + 2 = 12(x - 0{,}5)(x - \tfrac{1}{3})$$

2. g est de la forme uv avec $\begin{cases} u(x) = x^2 + 7x \text{ et } u'(x) = 2x + 7 \\ v(x) = \sqrt{x} \text{ et } v'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}} \end{cases}$

donc g est dérivable sur tous les intervalles de $\mathbb{R}_+^*$ et $g'(x) = u'v + uv' = (2x + 7)\sqrt{x} + (x^2 + 7x)\frac{1}{2\sqrt{x}}$

$$= \frac{(2x+7)\sqrt{x} \times 2\sqrt{x} + (x^2+7x)}{2\sqrt{x}}$$
$$= \frac{2x(2x+7) + (x^2+7x)}{2\sqrt{x}}$$
$$= \frac{4x^2+14x+x^2+7x}{2\sqrt{x}} = \frac{5x^2+21x}{2\sqrt{x}}$$

$$\text{Soit } g'(x) = \frac{x(5x+21)}{2\sqrt{x}}$$

❖ Exercice 2 : Calculer la dérivée d'un quotient, d'une fonction composée :

1) Pour chaque fonction, donner son domaine de dérivabilité et sa fonction dérivée.
   a. h définie sur $\mathbb{R} \backslash \left\{\frac{3}{5}\right\}$ par $h(x) = \frac{1}{5x-3}$
   b. j définie sur $\mathbb{R} \backslash \{7\}$ par $j(x) = \frac{x^2-2x+3}{7-x}$
2) On considère la fonction k définie par $k(x) = \sqrt{3x - 6}$
   a. Donner son domaine de définition puis son domaine de dérivabilité.
   b. Déterminer sa fonction dérivée.

1) a. g est de la forme $\frac{1}{u}$ $u(x) = 5x - 3$ et $u'(x) = 5$
u s'annule en $\frac{3}{5}$, donc g est dérivable sur tous les intervalles de $\mathbb{R} \backslash \left\{\frac{3}{5}\right\}$ et g'=$\frac{-u'}{u^2}$
Donc $g'(x) = \frac{-5}{(5x-3)^2}$

2) b. j est de la forme $\frac{u}{v}$ avec $\begin{cases} u(x) = x^2 - 2x + 3 \text{ et } u'(x) = 2x - 2 \\ v(x) = 7 - x \text{ et } v'(x) = -1 \end{cases}$
v s'annule en -7, donc g est dérivable sur tous les intervalles de $\mathbb{R} \backslash \left\{\frac{3}{5}\right\}$ et $g' = \frac{u'v - uv'}{v^2}$
donc $g'(x) = \frac{(2x-2)(7-x)-(x^2-2x+3)(-1)}{(7-x)^2} = \frac{14x-2x^2-14+2x+x^2-2x+3}{(7-x)^2} = \frac{-x^2+14x-11}{(7-x)^2}$

2) a. $3x - 6 \geq 0 \Leftrightarrow x \geq 2$
Donc l'ensemble de définition est [2 ;+∞[et le domaine de dérivabilité est]2 ; +∞[.
b. k est une fonction composée de la forme $x \mapsto 3x - 6x \mapsto \sqrt{3x - 6}$
donc $k'(x) = 3 \times \frac{1}{2\sqrt{3x-6}} = \frac{3}{2\sqrt{3x-6}}$