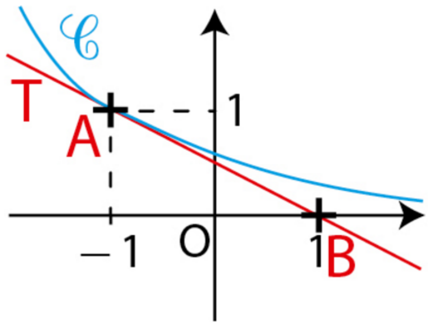
************************************ NOMBRE DERIVEE – TANGENTE ***************************

**4** Dans un repère orthonormé, on a tracé la courbe représentative $\mathscr{C}$ d'une fonction $f$ définie sur $\mathbb{R}$ et sa tangente T au point A d'abscisse $-1$.



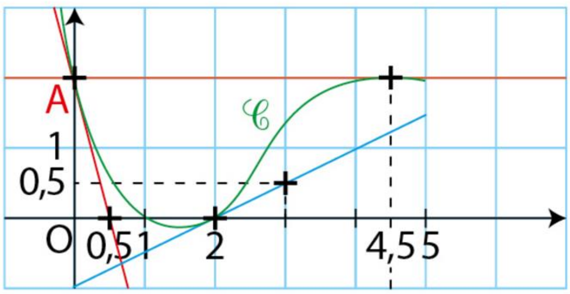

**a)** Déterminer graphiquement la pente de la tangente T.

**b)** En déduire le nombre dérivé de $f$ en $-1$.

## Exercice 28 p 101

**28** Dans le repère orthonormé ci-dessous, $\mathscr{C}$ est la courbe représentative d'une fonction $f$ définie sur l'intervalle $[0\,;5]$.

On a tracé les tangentes à la courbe $\mathscr{C}$ aux points d'abscisses 0 ; 2 et 4,5.




Déterminer graphiquement :

**a)** $f(0)$, $f(2)$, $f(4{,}5)$ **b)** $f'(0)$, $f'(2)$, $f'(4{,}5)$

## exercice résolu 1 p 97 : Calculer un nombre dérivé avec la définition

$f$ est la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x^2 + x$.

**a)** Calculer le taux de variation de $f$ entre 1 et $1+h$ avec $h \neq 0$.

**b)** Dans un repère orthonormé, donner une interprétation graphique de ce taux de variation.

**c)** Démontrer que la fonction $f$ est dérivable en 1 et donner son nombre dérivé en 1.

**Solution**

**a)** Pour tout nombre réel $h \neq 0$,

$$\frac{f(1+h)-f(1)}{h} = \frac{(1+h)^2+(1+h)-(1^2+1)}{h}$$

$$\frac{f(1+h)-f(1)}{h} = \frac{3h+h^2}{h} = \frac{h(3+h)}{h} = 3+h$$

On effectue des transformations d'écriture du taux de variation afin de le simplifier le plus possible.

**b)** Dans un repère orthonormé, $\mathscr{C}$ est la courbe représentative de $f$, A et M sont les points de $\mathscr{C}$ d'abscisses 1 et $1+h$ avec $h \neq 0$. Alors $\frac{f(1+h)-f(1)}{h}$ est la pente de la sécante (AM).

**c)** Le taux de variation $3+h$ a pour limite 3 lorsque $h$ tend vers 0 donc la fonction $f$ est dérivable en 1 et $f'(1) = 3$.

## exercices 3 p 97 20, 21, 22 et 23 p 100

**3** $f$ est la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x) = 2x^2 + 3$$

**a)** Calculer le taux de variation de $f$ entre 2 et $2+h$ avec $h \neq 0$.

**b)** Dans un repère orthonormé, donner une interprétation graphique de ce taux de variation.

**c)** Démontrer que la fonction $f$ est dérivable en 2 et donner son nombre dérivé en 2.

**20** $g$ est la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$g(x) = -x^2 + 3x - 1$$

**a)** Vérifier que pour tout nombre réel $h \neq 0$,

$$\frac{g(1+h) - g(1)}{h} = -h + 1$$

**b)** En déduire que $g$ est dérivable en 1 et donner $g'(1)$.

**21** $f$ est la fonction définie sur $\mathbb{R}^*$ par :

$$f(x) = \frac{4}{x}$$

**a)** Vérifier que pour tout nombre réel $h$ avec $h > -1$ et $h \neq 0$,

$$\frac{f(1+h) - f(1)}{h} = \frac{-4}{1+h}$$

**b)** En déduire que $f$ est dérivable en 1 et donner $f'(1)$.

**22** $g$ est la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$g(t) = t^2 + 7$$

**a)** Calculer le taux de variation de $g$ entre 4 et $4 + h$ avec $h \neq 0$.

**b)** En déduire le nombre dérivé de $g$ en 4.

**23** $f$ est la fonction définie pour tout nombre réel $x \neq -1$ par :

$$f(x) = \frac{-2}{x+1}$$

**a)** Calculer le taux de variation de $f$ entre 0 et $h$ avec $h > -1$ et $h \neq 0$.

**b)** En déduire que $f$ est dérivable en 0 et donner $f'(0)$.

**32** Dans un repère orthonormé, $\mathscr{C}$ est la courbe représentative d'une fonction $f$ dérivable en 0.

Dans chaque cas, déterminer une équation de la tangente à la courbe $\mathscr{C}$ au point A.

**a)** $A(0\,;0)$ et $f'(0) = 1$ **b)** $A(0\,;0)$ et $f'(0) = 3$

**c)** $A(0\,;2)$ et $f'(0) = 0$ **d)** $A(0\,;1)$ et $f'(0) = -5$

**31** $f$ est une fonction définie sur $\mathbb{R}$ telle que :

- $f(0) = 1$ • $f(2) = -2$ • $f(4) = -3$ • $f(6) = -2$
- $f'(0) = -2$ • $f'(2) = -1$ • $f'(4) = 0$ • $f'(6) = 1$

$\mathscr{C}$ est la courbe représentative de la fonction $f$ dans un repère orthonormé.

**a)** Placer les points A, B, C et D de $\mathscr{C}$ d'abscisses respectives 0 ; 2 ; 4 et 6.

**b)** Tracer les tangentes à la courbe $\mathscr{C}$ aux points A, B, C et D.

**c)** Tracer une allure possible de la courbe $\mathscr{C}$.

**33** $f$ est la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = -x^2$.
Dans un repère orthonormé, $\mathscr{C}$ est la courbe représentative de la fonction $f$.

**a)** On admet que $f'(-2) = 4$.
Déterminer une équation de la tangente T à la courbe $\mathscr{C}$ au point A d'abscisse $-2$.

**b)** Tracer la courbe $\mathscr{C}$ et tracer la tangente T.

**Interpréter le nombre dérivé en contexte : pente d'une tangente, vitesse instantanée, coût marginal…**

**Ex 25 et 26 p 101**

**25** On étudie la chute libre d'une bille.
Sa vitesse moyenne, en $m \cdot s^{-1}$, entre les instants $t = 2$ et $t = 2 + h$, en s, avec $h \neq 0$ est donnée par $4{,}9h + 19{,}6$.

**a)** Calculer la vitesse moyenne de la bille entre les instants :

- $t = 1{,}9$ et $t = 2$ ;
- $t = 2$ et $t = 2{,}1$.

**b)** Quelle est la vitesse instantanée de la bille à l'instant $t = 2$ ?

**26** Une entreprise fabrique des appareils électroniques. Le coût de production de $q$ appareils, en euro, est donné par $C(q) = \frac{1}{500}q^3 + 100$ avec $0 \leqslant q \leqslant 200$.

**a)** À l'aide du résultat obtenu à l'écran de calcul formel ci-dessous, calculer $C(q+1)$.

| | |
|---|---|
| 1 | $(q+1)^3$ |
| | Développer: $\mathbf{q^3 + 3\,q^2 + 3\,q + 1}$ |

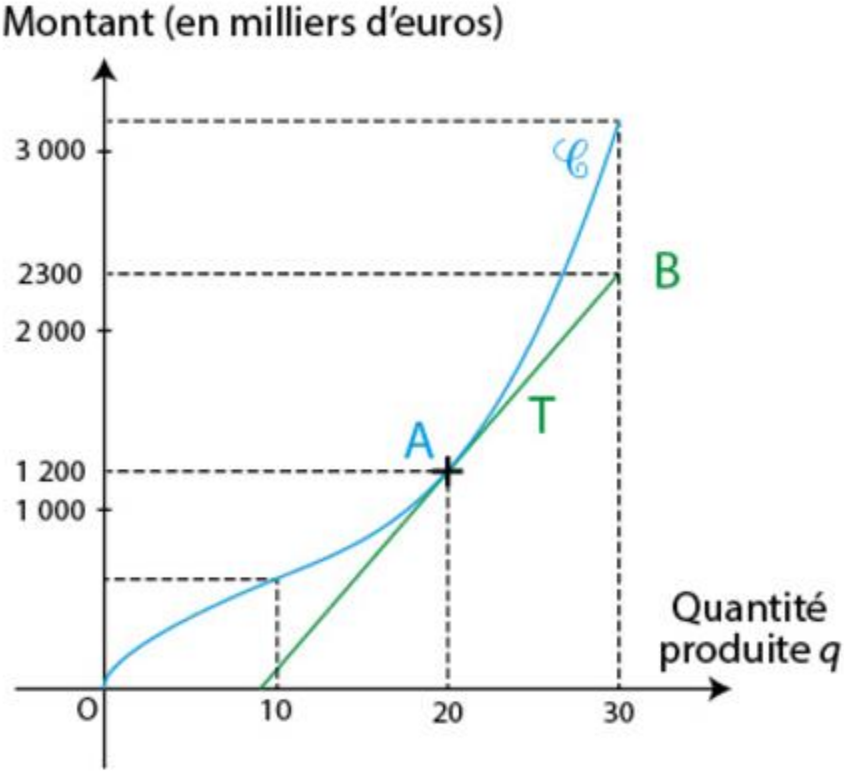
**b)** Déterminer alors le coût marginal $C(q+1) - C(q)$ en fonction de $q$.

## 105 Déterminer un coût marginal

**Représenter** **Calculer**

Dans un laboratoire pharmaceutique, le coût total de production, en milliers d'euros, de $q$ tonnes d'un médicament, avec $0 \leqslant q \leqslant 30$, est modélisé par une fonction $q \mapsto C(q)$.

Voici sa courbe représentative $\mathscr{C}$ dans un repère orthonormé.




La tangente T à $\mathscr{C}$ au point A est la droite $(AB)$ où $A(20\,;1200)$ et $B(30\,;2300)$.

**a)** Calculer la pente de la tangente T.

**b)** Estimer le coût marginal de production de la 21$^{e}$ tonne de médicament.

******************************** CORRECTIONS I – NOMBRE DERIVEE ET TANGENTE ****************

**4** **a)** La droite T passe par les points $A(-1;1)$ et $B(1;0)$ donc sa pente est $\dfrac{0-1}{1-(-1)} = -\dfrac{1}{2}$.

**b)** Le nombre dérivé de *f* en $-1$ est la pente de la tangente T, ainsi $f'(-1) = -\dfrac{1}{2}$.

**28** On lit sur le graphique :

**a)** $f(0) = 2$ $\quad f(2) = 0 \quad f(4{,}5) = 2$

**b)** $f'(0) = -4 \quad f'(2) = \dfrac{1}{2} \quad f'(4{,}5) = 0$

**3** **a)** Pour tout nombre réel $h \neq 0$,

$$\frac{f(2+h)-f(2)}{h} = \frac{2(2+h)^2+3-(2\times 2^2+3)}{h}$$

$$\frac{f(2+h)-f(2)}{h} = \frac{2(4h+h^2)}{h} = \frac{2h(4+h)}{h}$$

$$\frac{f(2+h)-f(2)}{h} = 2(4+h).$$

**b)** $\mathscr{C}$ est la courbe représentative de *f*, A et M sont les points de $\mathscr{C}$ d'abscisses 2 et $2+h$ avec $h \neq 0$, alors $\dfrac{f(2+h)-f(2)}{h}$ est la pente de la sécante (AM).

**c)** Le taux $2(4+h)$ a pour limite 8 lorsque *h* tend vers 0 donc *f* est dérivable en 2 et $f'(2) = 8$.

**20** **a)** Pour tout nombre réel $h \neq 0$,

$$\frac{g(1+h)-g(1)}{h} = \frac{-(1+h)^2+3(1+h)-1-(1)}{h}$$

$$\frac{g(1+h)-g(1)}{h} = \frac{-h^2+h}{h} = \frac{h(-h+1)}{h} = -h+1.$$

**b)** La limite de $-h+1$ lorsque $h$ tend vers 0 est 1 donc $g$ est dérivable en 1 et $g'(1)=1$.

**21** **a)** Pour tout nombre réel $h$ avec $h > -1$ et $h \neq 0$,

$$\frac{f(1+h)-f(1)}{h} = \frac{\frac{4}{1+h}-4}{h} = \frac{4-4(1+h)}{h(1+h)}$$

$$\frac{f(1+h)-f(1)}{h} = \frac{-4h}{h(1+h)} = \frac{-4}{1+h}.$$

**b)** La limite de $\frac{-4}{1+h}$ lorsque $h$ tend vers 0 est $-4$ donc $f$ est dérivable en 1 et $f'(1) = -4$.

**22** **a)** Pour tout nombre réel $h \neq 0$,

$$\frac{g(4+h)-g(4)}{h} = \frac{(4+h)^2+7-23}{h} = \frac{8h+h^2}{h}$$

$$\frac{g(4+h)-g(4)}{h} = \frac{h(8+h)}{h} = 8+h.$$

**b)** La limite de $8+h$ lorsque $h$ tend vers 0 est 8 donc $g'(4) = 8$.

**23** **a)** Pour tout nombre réel $h$ avec $h > -1$ et $h \neq 0$,

$$\frac{f(h)-f(0)}{h} = \frac{\frac{-2}{h+1}-(-2)}{h} = \frac{-2+2(h+1)}{h(h+1)}$$

$$\frac{f(h)-f(0)}{h} = \frac{2h}{h(h+1)} = \frac{2}{h+1}.$$

**b)** La limite de $\frac{2}{h+1}$ lorsque $h$ tend vers 0 est 2 donc $f$ est dérivable en 0 et $f'(0) = 2$.

**32** Une équation de la tangente à $\mathscr{C}$ au point A est :

**a)** $y = x$

**b)** $y = 3x$

**c)** $y = 2$

**d)** $y = -5x + 1$

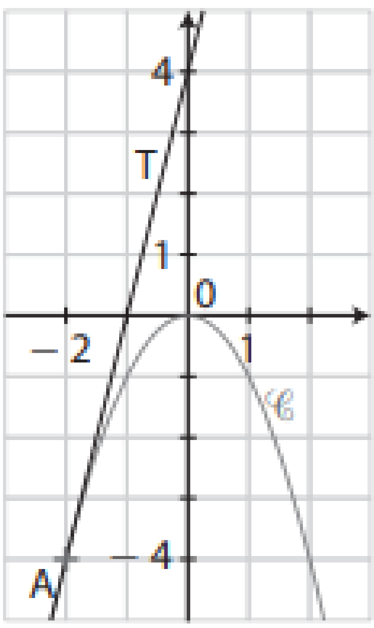
**33** **a)** Une équation de la tangente T à $\mathscr{C}$ au point A d'abscisse $-2$ est :

$y = f'(-2)(x-(-2)) + f(-2)$,

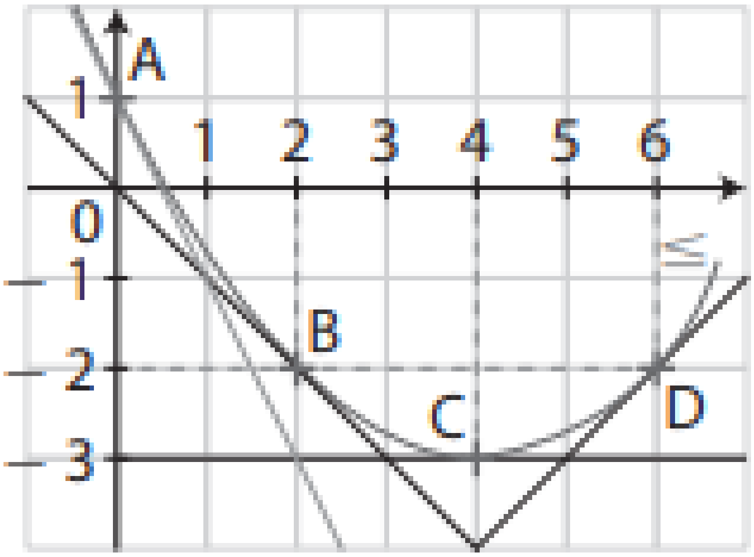
soit $y = 4(x+2) - 4$,

$y = 4x + 4$.

**b)** Voir ci-contre.



**31** **a) b)** et **c)**




**25** **a)** La vitesse moyenne de la bille entre les instants 1,9 et 2 est $4{,}9 \times (-0{,}1) + 19{,}6 = 19{,}11\,\mathrm{m \cdot s^{-1}}$.
Entre les instants 2 et 2,1, elle est égale à :
$$4{,}9 \times 0{,}1 + 19{,}6 = 20{,}09\ \mathrm{m \cdot s^{-1}}.$$
**b)** La limite de $4{,}9h + 19{,}6$ lorsque $h$ tend vers 0 est 19,6, donc la vitesse instantanée de la bille à l'instant $t = 2$ est $19{,}6\ \mathrm{m \cdot s^{-1}}$.

**26** **a)** $C(q+1) = \dfrac{1}{500}(q+1)^3 + 100$

$$C(q+1) = \frac{1}{500}(q^3 + 3q^2 + 3q + 1) + 100$$

$$C(q+1) = \frac{1}{500}q^3 + \frac{3}{500}q^2 + \frac{3}{500}q + \frac{50\,001}{500}$$

**b)** $C(q+1) - C(q) = \dfrac{3}{500}q^2 + \dfrac{3}{500}q + \dfrac{1}{500}$

**105** **a)** La pente de la tangente T est :

$$\frac{y_B - y_A}{x_B - x_A} = \frac{2\,300 - 1200}{30 - 20} = 110.$$

**b)** Le coût marginal de production de la 21$^{e}$ tonne de médicament est assimilé à $C'(20)$, soit à la pente de la tangente T.

Il s'élève donc à 110 milliers d'euros.

************* DERIVEE DES FONCTION USUELLES ****************************

**Exercices 11 p 99**

**11** Déterminer la dérivée de chacune des fonctions définies sur $\mathbb{R}$ par :

**a)** $g(x) = -4x^3 + x^2 - 7$ **b)** $f(x) = \dfrac{2x^2 - x}{5}$

**c)** $h(x) = (2x - 5)(x^2 - 2x + 2)$

**47 et 50 p 103**

**47** Déterminer la dérivée de chaque fonction polynôme définie sur $\mathbb{R}$.

**a)** $f(x) = x^2 + 3x - 2$ **b)** $g(x) = 2x^3 - 3x^2 + x + 1$

**c)** $h(x) = \dfrac{1}{2}x^4 - x^3 + 7x + 5$

**50** $f$ est la fonction définie sur $[0\,; +\infty[$ par :

$$f(x) = x\sqrt{x}$$

Démontrer que pour tout nombre réel $x$ de $]0\,; +\infty[$ :

$$f'(x) = \frac{3}{2}\sqrt{x}$$

**Exercice 12 p 99**

**12** $g$ est la fonction définie sur

$]-\infty\,; 4[\ \cup\ ]4\,; +\infty[$ par $g(x) = \dfrac{-2x + 5}{x - 4}$.

Déterminer la dérivée de la fonction $g$.

**57 et 58 p 103**

**57** $g$ est la fonction définie sur $\mathbb{R} - \left\{\frac{1}{4}\right\}$ par :

$$g(x) = \frac{7x+5}{4x-1}$$

$g$ est le quotient des fonctions $u : x \mapsto 7x+5$ et $v : x \mapsto 4x-1$.

**a)** Déterminer les dérivées des fonctions $u$ et $v$.

**b)** En déduire la dérivée de la fonction $g$.

**58** Déterminer la dérivée de la fonction $f$ définie sur $\mathbb{R} - \{1\}$ par $f(x) = \dfrac{x^2+3x}{x-1}$.

**puis 54 et 55 p 103**

**54** $g$ est la fonction définie sur $\left]-\infty\,;\,\frac{1}{5}\right[ \cup \left]\frac{1}{5}\,;\,+\infty\right[$ par $g(x) = \dfrac{1}{5x-1}$.

Pour tout nombre réel $x \neq \frac{1}{5}$, on écrit $g(x) = \dfrac{1}{v(x)}$ avec $v(x) = 5x-1$.

**a)** Déterminer la dérivée de la fonction $v$.

**b)** En déduire la dérivée de la fonction $g$.

**55** Déterminer la dérivée de la fonction $f$ définie sur $\mathbb{R}$ par $f(t) = \dfrac{1}{t^2 + t + 1}$.

**Exercice 39 ; 40 ; 42 p 102 : déterminer une équation de tangente**

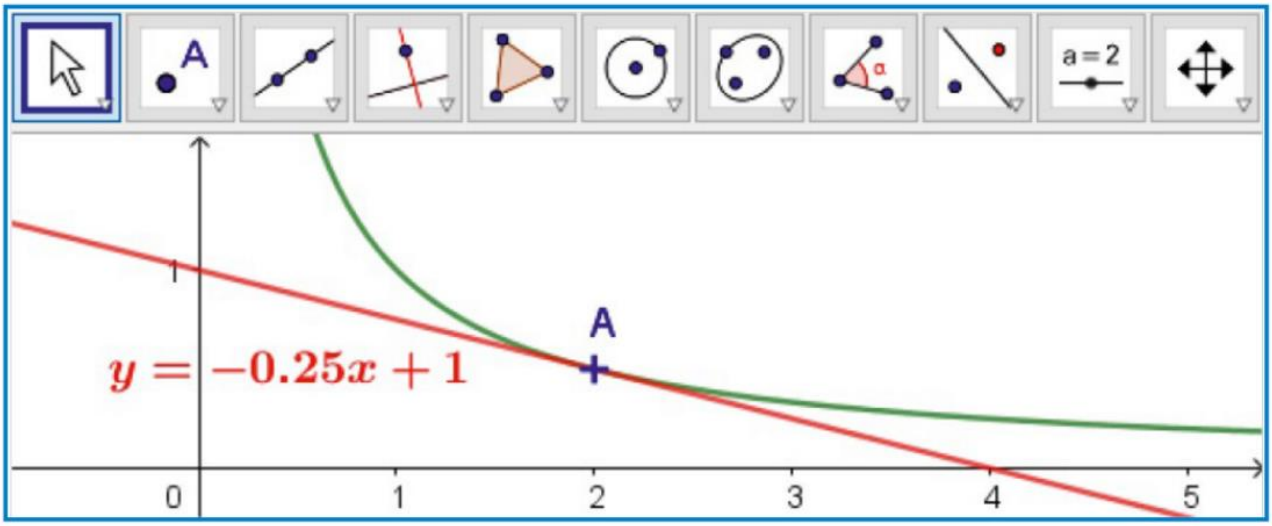
**39** $f$ est la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x^3$. $\mathscr{C}$ est sa courbe représentative dans un repère orthonormé.

**a)** Déterminer $f'(2)$.

**b)** Déterminer une équation de la tangente T à la courbe $\mathscr{C}$ au point d'abscisse 2.

**c)** Tracer la courbe $\mathscr{C}$ et la tangente T.

**40** On a utilisé un logiciel de géométrie pour tracer la courbe représentative de la fonction $x \mapsto \dfrac{1}{x}$ et la tangente à cette courbe au point d'abscisse 2.




Justifier l'équation de la tangente donnée par le logiciel.

**42** $f$ est la fonction carré, $g$ la fonction inverse et $h$ la fonction racine carrée.

Manon a déterminé, dans un repère orthonormé, les équations des tangentes à chacune des courbes représentatives de ces fonctions au point d'abscisse 1.

$$T_1 : y = -x + 2$$
$$T_2 : y = \frac{1}{2}x + \frac{1}{2}$$
$$T_3 : y = 2x - 1$$

Associer à chaque tangente la fonction qui lui correspond.

**Exercices 43 p 102**

**43** $f$ est la fonction définie sur $\mathbb{R}^*$ par :

$$f(t) = \frac{1}{t^3}$$

**a)** Quelle est la valeur du nombre $n$ de $\mathbb{Z}$ telle que pour $t$ de $\mathbb{R}^*$, $f(t) = t^n$ ?

**b)** Déterminer la fonction dérivée de $f$.

**c)** Vérifier que pour tout nombre réel $t$ non nul :

$$f'(t) = \frac{-3}{t^4}$$

**53 et 59 p 103**

**53** Déterminer la dérivée de chaque fonction définie sur $\mathbb{R}$.

**a)** $f(x) = (-3x+5)^2$ **b)** $g(x) = \left(x^2 + 4x - \frac{1}{2}\right)^2$

**59** $f$ est la fonction définie sur $\left[-\frac{4}{3}\ ;\ +\infty\right[$ par :

$$f(x) = \sqrt{3x+4}$$

Pour tout nombre réel $x \geqslant -\frac{4}{3}$, $f(x) = g(3x+4)$.

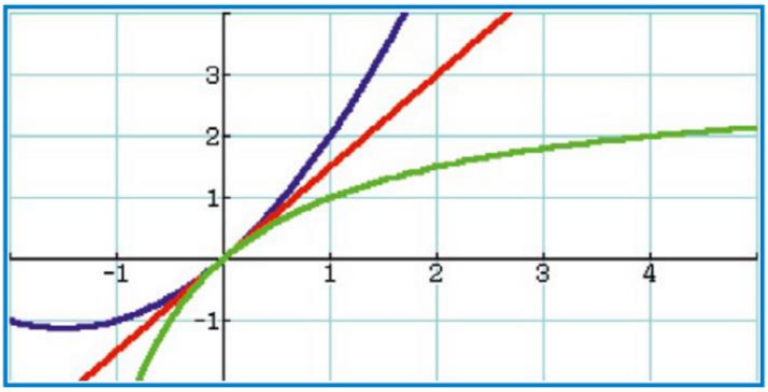
**a)** Préciser la fonction $g$, son intervalle de dérivabilité et sa dérivée.

**b)** En déduire l'intervalle de dérivabilité de $f$ et sa dérivée.

**78 ; 80 ; 85 p 108 /109**

**78** À l'écran d'une calculatrice, on a tracé les courbes représentatives des fonctions $f$ et $g$ définies sur $]-2\,;+\infty[$ par :

$$f(x)=\frac{3x}{x+2} \quad \text{et} \quad g(x)=\frac{1}{2}x^2+\frac{3}{2}x.$$




Il semble que ces deux courbes aient la même tangente T en l'origine du repère. Démontrer cette conjecture.

**80** $g$ est la fonction définie sur $]0\,;+\infty[$ par :

$$g(x)=\frac{\sqrt{x}}{x+1}$$

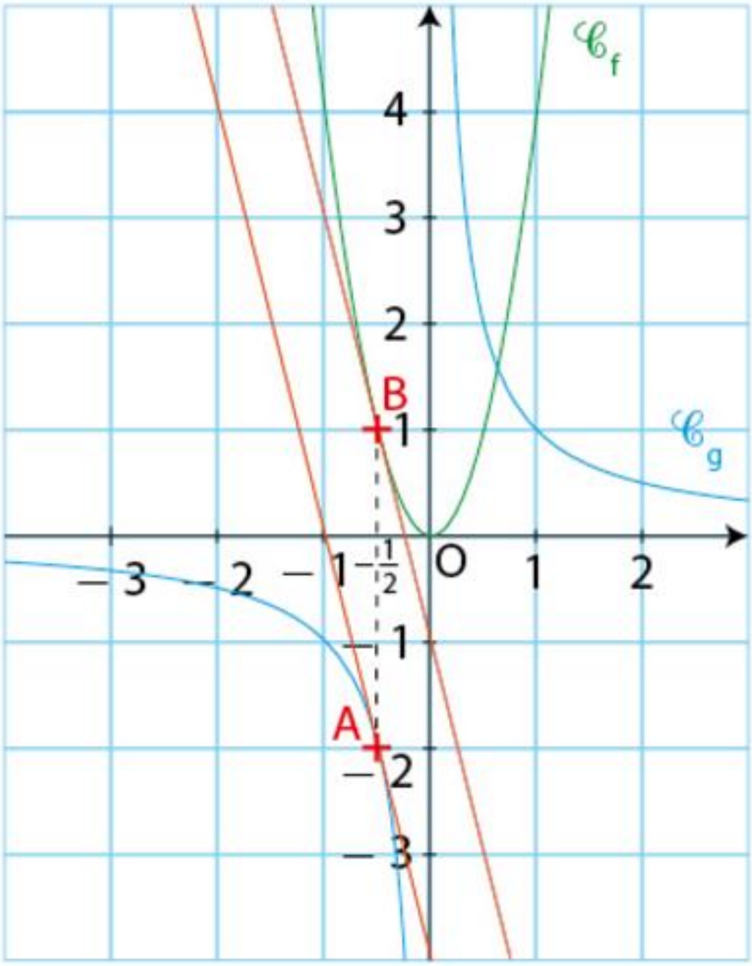
Démontrer que pour tout nombre réel $x>0$ :

$$g'(x)=\frac{(1-x)\sqrt{x}}{2x(x+1)^2}$$

**85** $f$ est la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = 4x^2$.
$g$ est la fonction définie sur $]-\infty\,;0[\cup]0\,;+\infty[$ par :

$$g(x) = \frac{1}{x}$$

$\mathscr{C}_f$ et $\mathscr{C}_g$ sont les courbes représentatives des fonctions $f$ et $g$ dans un repère orthonormé.




**a)** Démontrer que les tangentes à $\mathscr{C}_f$ et $\mathscr{C}_g$ en leurs points d'abscisse $-\dfrac{1}{2}$ sont parallèles.

**b)** Existe-t-il un autre nombre réel non nul $a$ tel que $\mathscr{C}_f$ et $\mathscr{C}_g$ aient des tangentes parallèles en leurs points d'abscisse $a$ ?

**Problèmes : 95 et 96 p 109  102 p 112**

## 95 Déterminer une production

**Chercher** **Calculer**

Dans une entreprise, le coût total de fabrication d'un produit, en euro, est exprimé par :

$$C(x) = x^3 - 100x^2 + 3000x + 200$$

où $x$ désigne la quantité de produits fabriqués, en tonne, comprise entre 0 et 60.

Le prix de vente d'une tonne du produit est de 600 €.

**a)** Déterminer le coût marginal de fabrication, que l'on assimile à la dérivée du coût total.

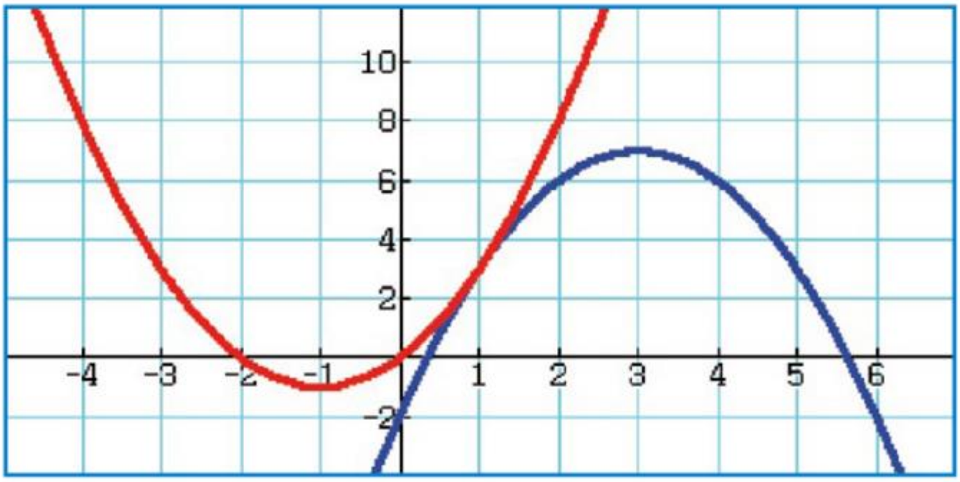
**b)** La production de l'entreprise doit être telle que le coût marginal de fabrication soit inférieur au prix de vente. En déduire les quantités, en tonne, que peut produire l'entreprise.

## 96 Observer et démontrer

**Raisonner** **Calculer**

À l'écran de sa calculatrice, Antoine a tracé les courbes représentatives des fonctions :

$$x \mapsto x^2 + 2x \quad \text{et} \quad x \mapsto -x^2 + 6x - 2.$$




**a)** Démontrer que ces deux courbes ont un unique point commun A.

**b)** Démontrer que les deux courbes ont une tangente commune en A.

## 102 Étudier une famille de courbes

Problème ouvert

Raisonner Calculer

Pour tout nombre réel non nul $a$, on note $\mathscr{P}_a$ la courbe représentative, dans un repère orthonormé, de la fonction :

$$x \mapsto ax^2 + (1-2a)x + a$$

Démontrer que toutes les courbes $\mathscr{P}_a$ passent par un même point E et qu'elles ont une tangente commune en ce point.

**11** **a)** $g$ est dérivable sur $\mathbb{R}$ et pour tout nombre réel $x$, $g'(x) = -12x^2 + 2x$.

**b)** Pour tout nombre réel $x$, $f(x) = \frac{1}{5}(2x^2 - x)$.

$f$ est dérivable sur $\mathbb{R}$ et pour tout nombre réel $x$, $f'(x) = \frac{1}{5}(4x - 1)$.

**c)** $h$ est le produit de deux fonctions dérivables sur $\mathbb{R}$ et pour tout nombre réel $x$,

$h'(x) = 2(x^2 - 2x + 2) + (2x - 5)(2x - 2)$

$h'(x) = 2x^2 - 4x + 4 + 4x^2 - 14x + 10$

$h'(x) = 6x^2 - 18x + 14$.

**12** $g$ est le quotient de deux fonctions dérivables sur $]-\infty\,; 4[$ et $]4\,; +\infty[$ donc $g$ est dérivable sur chacun de ces intervalles.
Pour tout nombre réel $x \neq 4$,

$$g'(x) = \frac{-2(x-4) - (-2x+5)}{(x-4)^2}$$

$$g'(x) = \frac{3}{(x-4)^2}.$$

**42** Une équation de la tangente au point d'abscisse 1 à la courbe :

$\mathscr{C}_f$ : $y = f'(1)(x-1) + f(1)$, $y = 2(x-1) + 1$,
$y = 2x - 1$. Il s'agit de $T_3$.

$\mathscr{C}_g$ : $y = g'(1)(x-1) + g(1)$, $y = -1(x-1) + 1$,
$y = -x + 2$. Il s'agit de $T_1$.

$\mathscr{C}_h$ : $y = h'(1)(x-1) + h(1)$, $y = \frac{1}{2}(x-1) + 1$,
$y = \frac{1}{2}x + \frac{1}{2}$. Il s'agit de $T_2$.

**43** **a)** Pour tout $t$ de $\mathbb{R}^*$, $f(t) = t^{-3}$ donc $n = -3$.

**b)** Pour tout $t$ de $\mathbb{R}^*$, $f'(t) = -3t^{-4}$.

**c)** Donc, pour tout $t$ de $\mathbb{R}^*$, $f'(t) = \dfrac{-3}{t^4}$.

**47** Pour tout nombre réel $x$,

**a)** $f'(x) = 2x + 3$

**b)** $g'(x) = 6x^2 - 6x + 1$

**c)** $h'(x) = 2x^3 - 3x^2 + 7$

**54** **a)** Pour tout nombre réel $x \neq \frac{1}{5}$, $v'(x) = 5$.

**b)** Pour tout nombre réel $x \neq \frac{1}{5}$,

$$g'(x) = -\frac{v'(x)}{v(x)^2} = -\frac{5}{(5x-1)^2}$$

**53** Pour tout nombre réel $x$,

**a)** $f'(x) = 2 \times (-3)(-3x + 5) = -6(-3x + 5)$

**b)** $g'(x) = 2(2x + 4)\left(x^2 + 4x - \dfrac{1}{2}\right)$

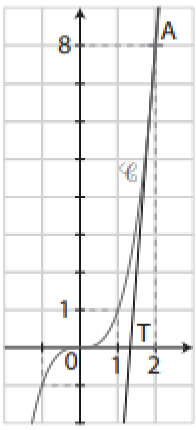
**39** **a)** Pour tout nombre réel $x$, $f'(x) = 3x^2$ donc $f'(2) = 12$.

**b)** Une équation de la tangente T à $\mathscr{C}$ au point d'abscisse 2 est :

$y = f'(2)(x-2) + f(2)$, soit $y = 12(x-2) + 8$,

$y = 12x - 16$.

**c)**




**59** **a)** $g$ est la fonction définie sur $[0\,;+\infty[$ par $g(X) = \sqrt{X}$.

$g$ est dérivable sur $]0\,;+\infty[$ et pour tout nombre réel $X > 0$, $g'(X) = \dfrac{1}{2\sqrt{X}}$.

**b)** $f$ est dérivable en tout nombre réel $x$ tel que $3x + 4 > 0$. Ainsi $f$ est dérivable sur $\left]-\dfrac{4}{3}\,;+\infty\right[$ et pour tout nombre réel $x$ tel que $x > -\dfrac{4}{3}$,

$f'(x) = 3 \times \dfrac{1}{2\sqrt{3x+4}}$, $f'(x) = \dfrac{3}{2\sqrt{3x+4}}$.

**40** Pour tout nombre réel $x \neq 0$, $f'(x) = -\frac{1}{x^2}$

donc $f'(2) = -\frac{1}{4}$.

Une équation de la tangente au point d'abscisse 2 est $y = f'(2)(x-2) + f(2)$, soit $y = -\frac{1}{4}(x-2) + \frac{1}{2}$,

$y = -\frac{1}{4}x + 1$.

Il s'agit bien de l'équation donnée par le logiciel.

**78** Pour tout nombre réel $x > -2$,

$f'(x) = \frac{3(x+2) - 3x}{(x+2)^2} = \frac{6}{(x+2)^2}$ et $g'(x) = x + \frac{3}{2}$.

Alors $f'(0) = g'(0) = \frac{3}{2}$.

D'autre part $f(0) = g(0) = 0$, les deux courbes ont donc la même tangente en O.

**85** **a)** Pour tout nombre réel $x$, $f'(x) = 8x$

donc $f'\left(-\frac{1}{2}\right) = -4$.

Pour tout nombre réel $x \neq 0$, $g'(x) = -\frac{1}{x^2}$ donc $g'\left(-\frac{1}{2}\right) = -4$.

$f'\left(-\frac{1}{2}\right) = g'\left(-\frac{1}{2}\right)$, donc les tangentes à $\mathscr{C}_f$ et $\mathscr{C}_g$ en leurs points d'abscisse $-\frac{1}{2}$ sont parallèles.

**b)** Pour tout nombre réel $x \neq 0$,

$f'(x) = g'(x)$ équivaut à $8x = -\frac{1}{x^2}$, soit $x^3 = -\frac{1}{8}$.

Cette équation admet $-\frac{1}{2}$ pour unique solution, il n'existe pas de réel $a$ différent de $-\frac{1}{2}$ tel que les tangentes à $\mathscr{C}_f$ et $\mathscr{C}_g$ en leurs points d'abscisse a soient parallèles.

**95** **a)** Pour tout nombre réel $x$,

$C'(x) = 3x^2 - 200x + 3\,000$.

**b)** Pour tout nombre réel $x$,

$C'(x) \leqslant 600$ équivaut à $3x^2 - 200x + 2\,400 \leqslant 0$.

Les racines du polynôme $3x^2 - 200x + 2\,400$ sont

$x_1 = \frac{20\left(5+\sqrt{7}\right)}{3} \approx 50{,}97$ et

$x_2 = \frac{20\left(5-\sqrt{7}\right)}{3} \approx 15{,}69$

La production de l'entreprise doit être comprise entre ces deux valeurs.

**96** **a)** Pour tout nombre réel $x$,
$x^2 + 2x = -x^2 + 6x - 2$ équivaut à
$2x^2 - 4x + 2 = 0$, soit $2(x-1)^2 = 0$.
L'unique solution de cette équation est $x = 1$.
Les deux courbes ont un unique point commun, le point A de coordonnées $(1\,;3)$.
**b)** $f$ : $x \mapsto x^2 + 2x$ a pour dérivée $f'$ : $x \mapsto 2x + 2$ donc $f'(1) = 4$.
$g$ : $x \mapsto -x^2 + 6x - 2$ a pour dérivée $g'$ : $x \mapsto -2x + 6$ donc $g'(1) = 4$.
$f'(1) = g'(1)$ donc les deux courbes ont une tangente commune au point A.

**102** Pour $x$ et $y$ réels,
$ax^2 + (1-2a)x + a = y$ équivaut à
$a(x^2 - 2x + 1) + x = y$
$a(x-1)^2 + x = y$
Pour $x = 1$ et $y = 1$, l'égalité précédente est vérifiée pour tout nombre réel $a$.
Ainsi toutes les paraboles $\mathcal{P}_a$ passent par le point $\mathrm{E}(1\,;1)$.
La fonction $f$ : $x \mapsto ax^2 + (1-2a)x + a$ a pour dérivée $f'$ : $x \mapsto 2ax + 1 - 2a$ et $f'(1) = 1$.
Les paraboles $\mathcal{P}_a$ ont ainsi une tangente commune en E, cette droite passe par E et a pour pente 1.