Mathématiques 1ère EDS	Devoir en Temps Libre n°8	Correction

Exercice 1 :

Factoriser chaque expression :

$A = 25 - 36x^2$ $= (5-6x)(5+6x)$	$B = (12x+5)^2 - (7x-2)(12x+5$ $= (12x+5)(12x+5-7x+2)$ $= (12x+5)(5x+7)$	$C = x^2 - 4x + 4$ $= (x-2)^2$
$D = 9 + 42x + 49x^2$ $= (3+7x)^2$	$E = (3x-1)^2 - 16$ $= (3x-1-4)(3x-1+4)$ $= (3x-5)(3x+3)$	$F = x^2 - 1 - (2x-5)(x+1)$ $= (x-1)(x+1) - (2x-5)(x+1)$ $= (x+1)(x-1-2x+5)$ $= (x+1)(4-x)$

Exercice 2 :

1) Résoudre les inéquations suivantes dans $\mathbb{R}$: a) $x^2 + 3x - 5 < -x + 2$ b) $\frac{1}{x^2-x-6} \geq 2$

a) $x^2 + 3x - 5 < -x + 2 \iff x^2 + 4x - 7 < 0.$

Le discriminant $\Delta = 4^2 - 4 \times 1 \times (-7) = 44 > 0$ et ses deux racines sont :

$x_1 = \frac{-4-\sqrt{44}}{2\times1} = -2 - \sqrt{11}$ et $x_2 = \frac{-4+\sqrt{44}}{2\times1} = -2 + \sqrt{11}$

Comme $\Delta > 0$, le polynôme a le signe de a (ici a=1>0) sauf entre ses racines :

x	$-\infty$		$-2-\sqrt{11}$		$-2+\sqrt{11}$		$+\infty$
$f(x)$		+	0	−	0	+	

L'ensemble des solutions de l'inéquation $x^2 + 3x - 5 < -x + 2$ est donc $S =]-2-\sqrt{11}\,;\, -2+\sqrt{11}[$.

b) $\frac{1}{x^2-x-6} \geq 2 \iff \frac{1}{x^2-x-6} - 2 \geq 0 \iff \frac{1-2(x^2-x-6)}{x^2-x-6} \geq 0 \iff \frac{-2x^2+2x+13}{x^2-x-6} \geq 0$

- Etudions le signe du dénominateur $x^2 - x - 6$ et déterminons les valeurs interdites

Le discriminant $\Delta = (-1)^2 - 4 \times 1 \times (-6) = 25 > 0$ et ses deux racines sont :

$x_1 = \frac{1-5}{2} = -2$ et $x_2 = \frac{1+5}{2} = 3$,

Ce quotient existe si et seulement si $x^2 - x - 6 \neq 0$, les valeurs interdites sont donc -2 et 3.

Comme $a = 1 > 0$, cette expression sera positive sauf entre ses racines.

- Etudions le signe du dénominateur $-2x^2 + 2x + 13.$

Le discriminant $\Delta = 2^2 - 4 \times (-2) \times 13 = 108 > 0$ et ses deux racines sont :

$x_1 = \frac{-2-\sqrt{108}}{-2\times2} = \frac{1+3\sqrt{3}}{2}$ et $x_2 = \frac{-2+\sqrt{108}}{-2\times2} = \frac{1-3\sqrt{3}}{2}$, comme $a = -2 < 0$, cette expression sera négative sauf entre ses racines, on obtient donc le tableau de signe suivant :

x	-∞	$\frac{1-3\sqrt{3}}{2}$		-2		3		$\frac{1+3\sqrt{3}}{2}$	+∞
$-2x^2+2x+13$	-	0			+			0	-
x^2-x-6	+			0	-	0			+
$\frac{-2x^2+2x+13}{x^2-x-6}$	-	0	+	‖	-	‖	+	0	-

L'ensemble des solutions de l'inéquation $\frac{1}{x^2-x-6} \geq 2$ est donc $S = [\frac{1-3\sqrt{3}}{2}; -2[\cup]3; \frac{1+3\sqrt{3}}{2}]$

2) Étudier le signe des expressions suivantes :

a) $\varphi_1 = \frac{-2}{2-2x} - \frac{2}{1-2x}$ b) $\varphi_2 = 2x^4 + 5x^3 + 3x^2$ c) $\varphi_3 = \frac{1-5x^2}{x^2} + 4$

a) $\varphi_1 = \frac{-2}{2-2x} - \frac{2}{1-2x} = \frac{-2(1-2x)-2(2-2x)}{(2-2x)(1-2x)} = \frac{-2+4x-4+4x}{(2-2x)(1-2x)} = \frac{8x-6}{(2-2x)(1-2x)}$

$8x - 6 \geq 0 \quad \Leftrightarrow \quad 8x \geq 6 \quad \Leftrightarrow \quad x \geq \frac{6}{8} \quad \Leftrightarrow \quad x \geq 0{,}75$

$2 - 2x \geq 0 \quad \Leftrightarrow \; 2 \geq 2x \; \Leftrightarrow \; 1 \geq x \; \Leftrightarrow \; x \leq 1$

$1 - 2x \geq 0 \quad \Leftrightarrow \; 1 \geq 2x \; \Leftrightarrow \; \frac{1}{2} \geq x \; \Leftrightarrow \; x \leq \frac{1}{2}$

De plus, le quotient existe si et seulement si le dénominateur est non nul , c'est-à-dire lorque $x = 1$ ou $x = \frac{1}{2}$

Donc le quotient existe dans $\mathbb{R} - \left\{\frac{1}{2}; 1\right\}$

On obtient le tableau de signe suivant :

x	$-\infty$		$0,5$		$0,75$		1		$+\infty$
$4x-6$		−	|	−	0	+	|	+	
$2-2x$		+	|	+	|	+	0	−	
$1-2x$		+	0	−	|	−	|	−	
$\frac{4x-6}{(2-2x)(1-2x)}$		−	‖	+	0	−	‖	+	

b) $\varphi_2 = 2x^4 + 5x^3 + 3x^2 = x^2(2x^2 + 5x + 3)$

Comme $\forall \in \mathbb{R}\; x^2 > 0 \;\; \varphi_2$ a le signe de $2x^2 + 5x + 3$.

Le discriminant $\Delta = 5^2 - 4 \times 2 \times 3 = 1 > 0$ et ses deux racines sont :

$x_1 = \frac{-5-1}{2\times2} = -\frac{3}{2}$ et $x_2 = \frac{-5+1}{2\times2} = -1$, comme $a = 2 > 0$, cette expression sera positive sauf entre ses racines, on obtient donc le tableau de signe suivant :

x	-∞		$-\frac{3}{2}$		-1		0		$+\infty$
$2x^4+5x^3+3x^2$		+	0	−	0	+	0	+	

b) $\varphi_3 = \frac{1-5x^2}{x^2} + 4 = \frac{1-5x^2+4x^2}{x^2} = \frac{1-x^2}{x^2} = \frac{(1-x)(1+x)}{x^2}$

Comme $\forall \in \mathbb{R}\; x^2 > 0 \;\; \varphi_3$ a le signe de $(1-x)(1+x)$ c'est-à-dire négatif sauf entre ses racines -1 et 1.

De plus, le quotient existe si et seulement si le dénominateur est non nul , c'est-à-dire lorque $x = 0$
donc le quotient existe dans $\mathbb{R}*$
on obtient donc le tableau de signe suivant :

x	-∞		-1		0		1		$+\infty$
$2x^4+5x^3+3x^2$		−	0	+	‖	+	0	−	

Exercice 3 :
Soient f et g deux fonctions définies par $f(x) = x^3 - 3x^2 + 5x - 1$ et $g(x) = x^2 - 1$ de courbes représentatives respectives C_f et C_g dans un repère orthonormé.
Étudier les positions relatives de C_f et C_g .

Etudions le signe de la différence $f(x) - g(x)$:

$$f(x) - g(x) = x^3 - 3x^2 + 5x - 1 - x^2 + 1 = x^3 - 4x^2 + 5x = x(x^2 - 4x + 5)$$

Le discriminant du trinôme $x^2 - 4x + 5$ est $\Delta = (-4)^2 - 4 \times 1 \times 5 = -4 < 0$
Comme $a = 1 > 0$, $\forall \in \mathbb{R}$, le trinôme $x^2 - 4x + 5 > 0$
Le signe de la différence $f(x) - g(x)$ est donc du même signe que x. On obtient donc le tableau de signe suivant :

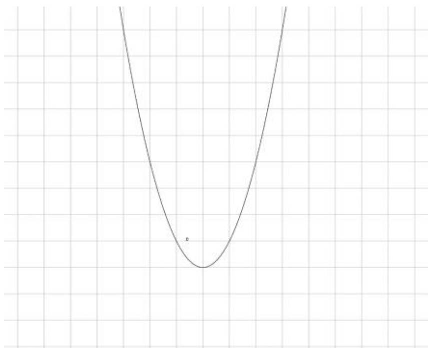
x	$-\infty$		0		$+\infty$
$f(x) - g(x)$:		$-$	0	$+$	

On en conclut que :

La courbe C_f est en-dessous de la courbe C_g pour tout x de $]-\infty\,; 0]$.

La courbe C_f est au-dessus de la courbe C_g pour tout x de $[0\,; +\infty[$.

Exercice 4 :
La parabole P représentée sur la feuille ci-jointe a pour équation $y = x^2 + 4x$ dans un repère (O, $\vec{i}$, $\vec{j}$)



1) Déterminer les coordonnées de son sommet.
On a oublié de représenter le repère. Le placer sachant que l'unité de longueur est de 1 cm

1) On a $y = x^2 + 4x \iff y = (x+2)^2 - 4$
Donc les coordonnées du sommet sont S (-2 ; 4)

2) Soit D la droite d'équation
$y = 2x - 1$ Tracer D.

2) Pour tracer la droite D, on détermine les coordonnées de deux points par exemple : A (0 ; -1) et B (2 ; 3)

3) Prouver que P et D ont un seul point commun T. Calculer ses coordonnées.

3) Pour déterminer les coordonnées de T il faut résoudre dans $\mathbb{R}$ le système :

$$\begin{cases} y = 2x - 1 \\ y = x^2 + 4x \end{cases} \iff \begin{cases} y = 2x - 1 \\ x^2 + 4x = 2x - 1 \end{cases} \iff \begin{cases} y = 2x - 1 \\ x^2 + 2x + 1 = 0 \end{cases}$$

On résout dans $\mathbb{R}$ l'équation du second degré $x^2 + 2x + 1 = 0 \iff (x+1)^2 = 0 \iff x = -1$

On revient au système : $\begin{cases} y = 2x - 1 \\ x^2 + 2x + 1 = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} x = -1 \\ y = 2 \times (-1) - 1 = -3 \end{cases}$

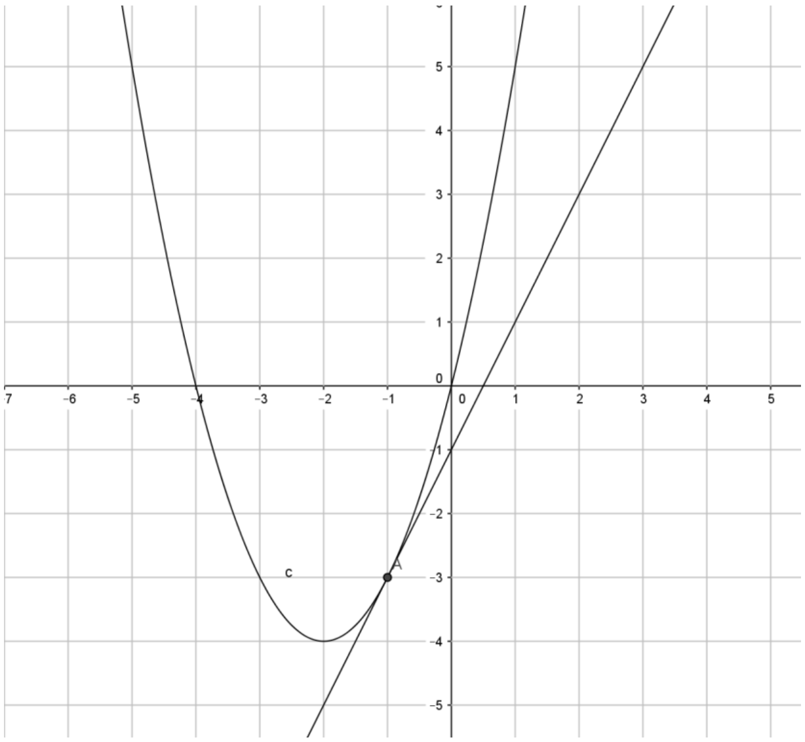
P et D ont donc un seul point commun T (-1 ; -3)

4) Justifier que P est au-dessus de D

4) Pour justifier que P est au-dessus de T , on va étudier dans $\mathbb{R}$ le signe de la différence :

$x^2 + 4x - (2x - 1) = x^2 + 4x - 2x + 1 = x^2 + 2x + 1 = (x + 1)^2 \geq 0 \; pour \; tout \; \boldsymbol{x} \in \mathbb{R}$

Donc P est bien toujours au-dessus de D et elles ont un seul point d'intersection T



<u>Exercice 5</u>:

1) Soit la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = 3 - 2x^2$
   a) Calculer le taux de variation de f entre 1 et $1 + h$ avec h non nul.
   b) Dans un repère orthonormé, donner une interprétation graphique de ce taux de variation.
   c) Démontrer que la fonction f est dérivable en 1 et donner son nombre dérivé en 1.

1)

a) On calcule le taux de variation de f entre $1 + h$ (avec $h \neq 0$) :

$$\frac{f(1+h) - f(1)}{h} = \frac{3 - 2(1+h)^2 - (3 - 2 \times 1^2)}{h} = \frac{3 - 2(1^2 + 2h + h^2) - 1}{h}$$

$$= \frac{3 - 2 - 4h - 2h^2 - 1}{h}$$

$$= \frac{-4h - 2h^2}{h} = \frac{h(-4 - 2h)}{h} = -4 - 2h$$

b) Ce nombre est la pente de la droite (AM), **sécante** à la courbe de f passant par les points $A(1, f(1))$ et M ($1 + h$; $f(1 + h)$).

c) Le taux de variation qui est égal à $(-4 - 2\,h)$ a pour limite -4 lorsque h tend vers 0 , cette limite est réelle et unique donc la fonction f est dérivable en 1 et $f'(1) = -4$

2) Soit la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x^2 - 1$. On donne $f'(2) = 4$
Démontrer que la tangente à la courbe de f au point A d'abscisse 2 passe par le point B(3 ; 7).

Déterminons l'équation de la tangente à la courbe de f au point d'abscisse 2.
On sait que $f(2) = 2^2 - 1 = 3$

$y = f'(2)(x-2) + f(2)$ c'est-à-dire $y = 4(x-2) + 3 = 4x - 8 + 3 = 4x - 5$

Le point B appartient à la tangente si et seulement si ses coordonnées vérifient l'équation
$4 \times 3 - 5 = 7$ donc la tangente à la courbe de f au point A d'abscisse 2 passe par le point B(3 ; 7).

Exercice 6: **Un peu de calcul vectoriel (pas besoin de chercher les équations des droites même si c'est une méthode):**
Dans un repère (O ,$\vec{\imath}$,$\vec{\jmath}$), on considère les points $A(-3\ ;\ 2), B(\ 3\ ;\ 5)\ et\ C(\ 2\ ;\ 1)$.

1) Démontrer que les droites (AB) et (OC) sont parallèles. m désigne un nombre réel et M est le point de coordonnées (5 ; m). Pour quelle valeur de m, les points A,B et M sont-ils alignés ?
2) Soit N le point d'abscisse n. Déterminer les coordonnées de N sachant que N est le point d'intersection de la droite (AB) avec l'axe des abscisses.

1) Dans un repère (O ,$\vec{\imath}$,$\vec{\jmath}$), on considère les points A(-3 ; 2), B(3 ; 5) et C(2 ; 1).

- $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}6\\3\end{pmatrix}$ $\overrightarrow{OC}\begin{pmatrix}2\\1\end{pmatrix}$ $\overrightarrow{AB} = 3\overrightarrow{OC}$ $\overrightarrow{AB}\ et\ \overrightarrow{OC}\ colinéaires$ par conséquent les droites (AB) et (OC) sont parallèles.

- $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}6\\3\end{pmatrix}$ $\overrightarrow{AM}\begin{pmatrix}8\\m-2\end{pmatrix}$

A, B et M alignés $\Leftrightarrow \overrightarrow{AB}\ et\ \overrightarrow{AM}\ colinéaires \Leftrightarrow 6 \times (m-2) - 3 \times 8 = 0 \Leftrightarrow 6m - 12 - 24 = 0$

$\Leftrightarrow 6m = 36 \Leftrightarrow m = 6$

Lorsque $m = 6$ les vecteurs $\overrightarrow{AB}\ et\ \overrightarrow{AM}\ sont\ colinéaires$, et donc les points A , B et M sont alignés.

2) Un vecteur directeur de la droite (AB) est le vecteur $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}6\\3\end{pmatrix}$.

Soit un point $M\ (x\ ;\ y)$ de la droite (AB) ; on a $\overrightarrow{AM}\begin{pmatrix}x-(-3)\\y-2\end{pmatrix}$

Le point M appartient à (AB) si et seulement si les vecteurs $\overrightarrow{AM}\begin{pmatrix}x+3\\y-2\end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}6\\3\end{pmatrix}$ sont colinéaires.

Ce qui équivaut à $det(\overrightarrow{AM}\ ;\overrightarrow{AB}) = 0 \quad \Leftrightarrow 3(x+3) - 6(y-3) = 0$
$\Leftrightarrow 3x + 9 - 6y + 18 = 0$
$\Leftrightarrow 3x - 6y + 27 = 0$

Une équation cartésienne de la droite (AB) est donc : $3x - 6y + 27 = 0$

Pour le point d'intersection de la droite (AB) avec l'axe des abscisses, $y = 0$, on doit donc résoudre :

$3n + 27 = 0 \quad \Leftrightarrow n = \frac{-27}{3} = -9$

Les coordonnées de N point d'intersection de la droite (AB) avec l'axe des abscisses sont donc $(-9\ ;0)$