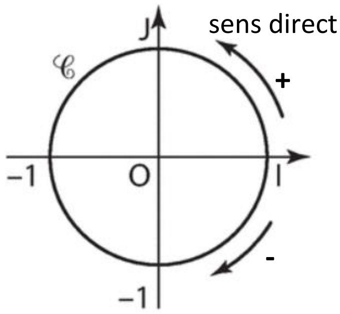
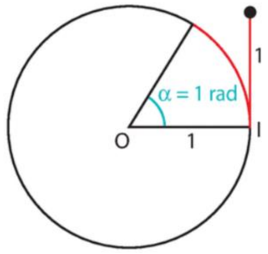
I – Cercle trigonométrique et radian :

a) Le cercle trigonométrique :

Définition :
Dans un repère orthonormé $(O\,;I\,;J)$, **le cercle trigonométrique** $\mathcal{C}$ est le cercle de centre O et de rayon 1 orienté dans le sens inverse des aiguilles d'une montre, appelé sans direct ou **sens trigonométrique.**



b) Longueur d'arc et mesure en radian :



Définition :
On considère **le cercle trigonométrique** $\mathcal{C}$ **.**
Le périmètre P du cercle trigonométrique est égal à : $P = 2\pi r = 2\pi \times 1 = 2\pi$

Le radian est la mesure d'un angle au centre qui intercepte sur $\mathcal{C}$ un arc de longueur 1.
Le symbole associé à cette mesure est **rad**.

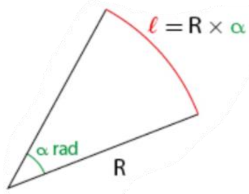
Par conséquent $360° = 2\pi$ rad. Les mesures en radians ou en degrés sont donc proportionnelles.
Un angle de π radians mesure donc $180°$
Une simple règle de proportionnalité permet de convertir d'une unité à l'autre :

180°	π
d	r

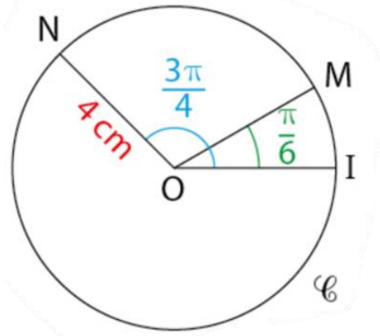
Ce qui donne le tableau de correspondances suivant :

Angle en degré	0°	30°	45°	60°	90°	180°	360°
Angle en radian	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	π	2π

Longueur d'arc :
La longueur ℓ d'un arc de cercle de rayon R et d'angle au centre de mesure en radian $(0 \leq \alpha \leq 2\pi)$est : $\ell = R \times \alpha$



❖ **Exemple :**
$\mathcal{C}$ est un cercle de centre O et de rayon $4cm$. Les points I, M, N du cercle sont tels que : $\widehat{IOM} = \frac{\pi}{6}\,rad\,;\widehat{ION} = \frac{3\pi}{4}\,rad\ \ ,M \in \widehat{\mathrm{IN}}$.
a) Déterminer la mesure de chacun des angles en degré puis compléter la figure.
b) Exprimer la longueur de l'arc $\widehat{\mathrm{MN}}$ en fonction de π.

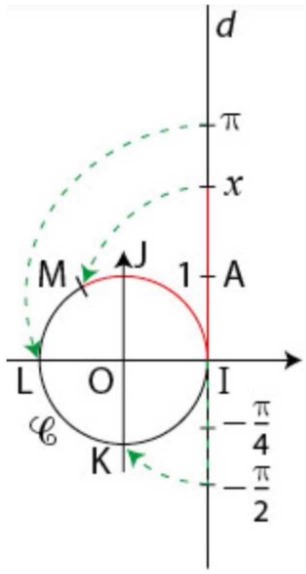


a) $\widehat{IOM} = \frac{180°}{\pi} \times \frac{\pi}{6} = 30°$ et $\widehat{ION} = \frac{180°}{\pi} \times \frac{3\pi}{4} = 135°$.

b) $\widehat{MON} = \left(\frac{3\pi}{4} - \frac{\pi}{6}\right) rad = \frac{7\pi}{12} rad$

donc $\ell = 4\ cm \times \frac{7\pi}{12}$ c'est-à-dire $\ell = \frac{7\pi}{3}\ cm$

II – Enroulement de la droite numérique :



$\mathcal{C}$ est le cercle trigonométrique de centre O et $(O\,;I\,;J)$ est un repère orthonormé direct (on se déplace de I vers J dans le sens direct sur le cercle).
A est le point de coordonnées (1 ;1) et d est la droite (IA) munie du repère (I ;A). On enroule cette droite, dite droite des réels, autour du cercle

Définition :
Tout nombre réel x de la droite vient s'appliquer sur un point M du cercle.
On dit que **M est le point image** du nombre réel x.

❖ **Exemples**

- L est le point image du nombre réel π . $\widehat{\text{IL}} = \pi$ et $\widehat{IOL} = 180°$.
- K est le point image du nombre réel $-\frac{\pi}{2}$. $\widehat{\text{IK}} = \frac{\pi}{2}$ et $\widehat{IOK} = 90°$.

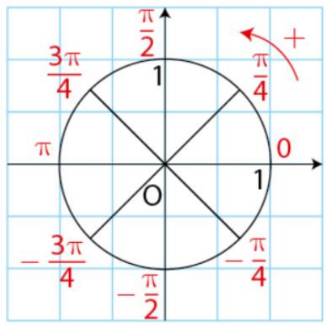
Rq : Si M est le point image du nombre réel x avec $0 \leq x \leq \pi$, alors $\widehat{IOM} = x\,rad$

Propriété :
Deux nombres réels x et x' de la droite numérique ont le même point image sur $\mathcal{C}$
si et seulement si $\boldsymbol{x = x' + k \times 2\pi}$ où $\boldsymbol{k \in \mathbb{Z}}$.

La mesure principale d'un angle est la mesure, qui parmi toutes les autres, se situe dans l'intervalle$]-\pi\,;\,\pi]$.

❖ **Démonstration :** Le périmètre du cercle trigonométrique a pour longueur $\boldsymbol{2\pi}$. Donc les points x et x' tels que $\boldsymbol{x = x' + k \times 2\pi}$ **,** où $\boldsymbol{k} \in \mathbb{Z}$**, sont espacés de** $|\boldsymbol{k}|$ **tour(s) complet(s) et ils sont confondus.**

❖ **Placement sur le cercle trigonométrique :**



Pour simplifier la lecture sur le cercle trigonométrique, on note le nombre réel au même endroit que son image associée sur le cercle.

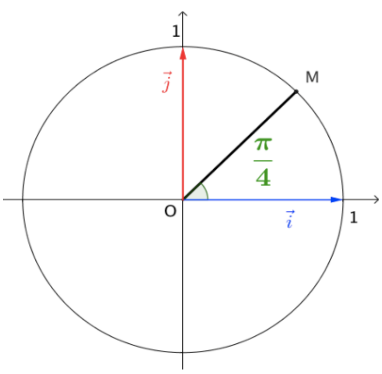
☼ ***Méthode :*** *Pour trouver un point image : On utilise le fait que la longueur du cercle trigonométrique est 2π ,par proportionnalité, le demi-cercle mesure π et le quart de cercle mesure* $\frac{\pi}{2}$.
Pour déterminer plusieurs réels associés au même point sur le cercle trigonométrique, il suffit d'ajouter ou de soustraire 2π au réel donné.

❖ **Exercice : placer un point image sur le cercle trigonométrique**

Placer les point M et N images respectives des nombres réels $\frac{9\pi}{4}$ et $\frac{8\pi}{3}$ sur le cercle trigonométrique.

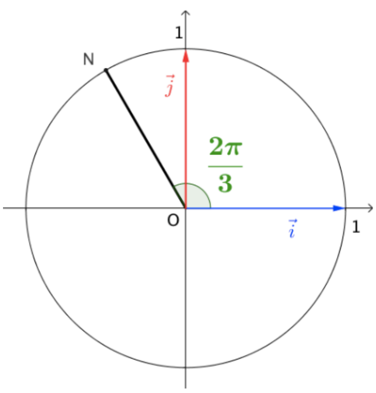
$$\frac{9\pi}{4} = \frac{8\pi}{4} + \frac{\pi}{4} = 2\pi + \frac{\pi}{4}$$

Le point M se trouve au même point image que le réel $\frac{\pi}{4}$.



$$\frac{8\pi}{3} = \frac{6\pi}{3} + \frac{2\pi}{3} = 2\pi + \frac{2\pi}{3}$$

Le point N se trouve au même point image que le réel $\frac{2\pi}{3}$.



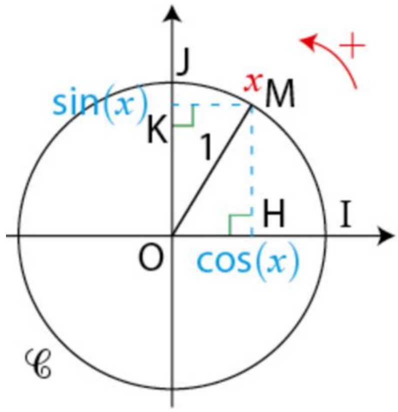
III – Cosinus et sinus d'un nombre réel :

a) Cosinus et sinus :

Définition :
$\mathcal{C}$ est le cercle trigonométrique de centre O muni du repère orthonormé direct $(O\,;I\,;J)$.
M est le point de $\mathcal{C}$ image d'un réel x.

- **L'abscisse** de M est appelée le **cosinus de x, noté $cos(x)$;**
- **L'ordonnée** de M est appelée **le sinus de x, noté $sin(x)$;**

Le point M a donc pour coordonnées $(\boldsymbol{cos(x)}\,;\boldsymbol{sin(x)})$.



❖ **Exemple :**
Le nombre réel $\frac{\pi}{2}$ a pour image le point J de coordonnées $(0\,;1)$ donc cos $\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0$ et sin $\left(\frac{\pi}{2}\right) = 1$

Propriété : Pour tout nombre réel x,

$$-1 \leq \sin x \leq 1 \qquad -1 \leq \cos x \leq 1 \qquad cos^2x + sin^2x = 1$$

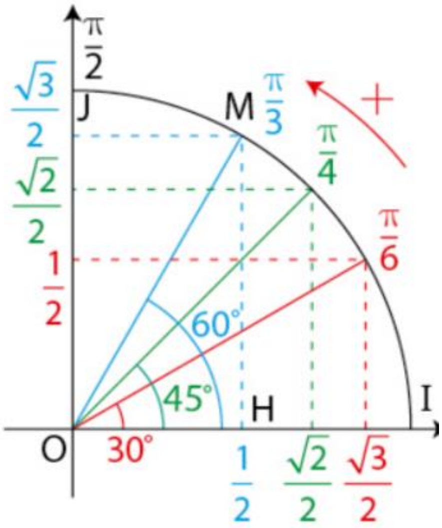
❖ **Démonstration :**
L'abscisse et l'ordonnée de tout point d'un cercle trigonométrique sont compris entre -1 et 1.
En appliquant le théorème de Pythagore au triangle OHM rectangle en H, on a :
$OM^2 = OH^2 + HM^2 = (cos(x))^2 + (sin(x))^2$, Or, $OM = 1$ donc $cos^2x + sin^2x = 1$

b) Lien avec le cosinus et le sinus d'un angle vus au collège :

Avec les notations de la figure du paragraphe a) (avec $0 \leq x \leq \frac{\pi}{2}$), on peut écrire dans le triangle OHM rectangle en H que :
$\cos(\widehat{IOM}) = \frac{OH}{OM} = \frac{OH}{1} = OH = \cos(x)$ et $\sin(\widehat{IOM}) = \frac{HM}{OM} = \frac{HM}{1} = HM = \sin(x)$ et

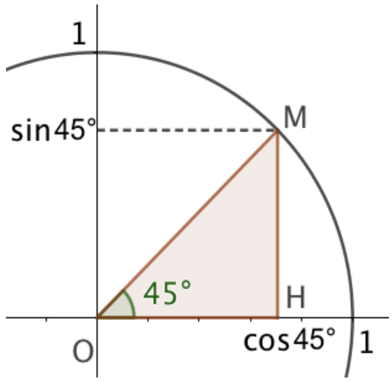
❖ **Tableau des valeur remarquables :**

Angle	0	30°	45°	60°	90°
x	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$
$\cos x$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0
$\sin x$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1



❖ **<u>Démonstrations au programme :</u>**

- Démontrons que : $\sin\left(\frac{\pi}{4}\right) = \frac{\sqrt{2}}{2}$

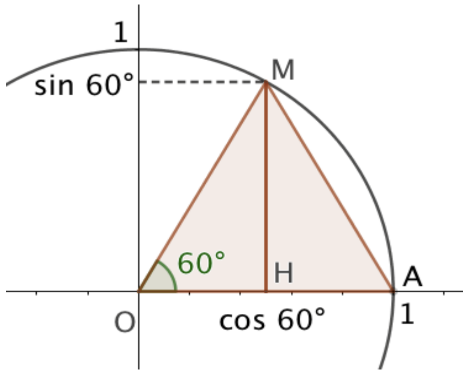


La mesure $\frac{\pi}{4}$ radian est à égale à la mesure 45°.
Le triangle OHM est rectangle est isocèle en H, en effet l'angle $\widehat{OMH}$ est égal à : 180 – 90 – 45 = 45°.
Donc OH = HM on en déduit que : $\sin\left(\frac{\pi}{4}\right) = \cos\left(\frac{\pi}{4}\right)$
Or, $\cos^2\left(\frac{\pi}{4}\right) + \sin^2\left(\frac{\pi}{4}\right) = 1 \quad \Leftrightarrow \quad \sin^2\left(\frac{\pi}{4}\right) + \sin^2\left(\frac{\pi}{4}\right) = 1$

$\Leftrightarrow\ 2\sin^2\left(\frac{\pi}{4}\right) = 1 \Leftrightarrow\ \sin^2\left(\frac{\pi}{4}\right) = \frac{1}{2}$

$\Leftrightarrow \sin\left(\frac{\pi}{4}\right) = \sqrt{\frac{1}{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$ on a donc $\sin\left(\frac{\pi}{4}\right) = \frac{\sqrt{2}}{2}$

- Démontrons que $\cos\left(\frac{\pi}{3}\right) = \frac{1}{2}$ et $\sin\left(\frac{\pi}{3}\right) = \frac{\sqrt{3}}{2}$

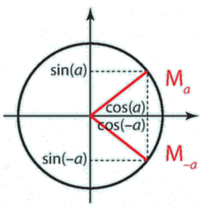
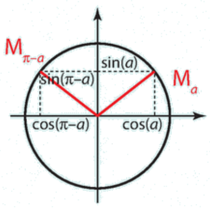
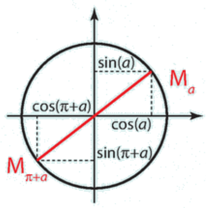
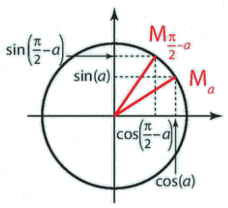
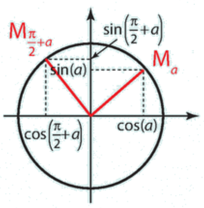


La mesure $\frac{\pi}{3}$ radian est à égale à la mesure 60°.
Le triangle OMA est isocèle en O, en effet OA = OM.
Donc les angles $\widehat{OMA}$ et $\widehat{MAO}$ sont égaux à (180 – 60) : 2 = 60°.
Le triangle OMA est donc équilatéral.

Ainsi, la hauteur (MH) est également une médiane du triangle. Elle coupe donc [OA] en son milieu.
On a donc : $\cos\left(\frac{\pi}{3}\right) = \frac{1}{2}$ Or, $\cos^2\left(\frac{\pi}{3}\right) + \sin^2\left(\frac{\pi}{3}\right) = 1$
Soit : $\left(\frac{1}{2}\right)^2 + \sin^2\left(\frac{\pi}{3}\right) = 1 \quad \Leftrightarrow \quad \sin^2\left(\frac{\pi}{3}\right) = 1 - \left(\frac{1}{2}\right)^2$
$\sin^2\left(\frac{\pi}{3}\right) = 1 - \frac{1}{4} \quad \Leftrightarrow \sin^2\left(\frac{\pi}{3}\right) = \frac{3}{4}$
$\sin\left(\frac{\pi}{3}\right) = \sqrt{\frac{3}{4}} = \frac{\sqrt{3}}{2}$ on a donc $\sin\left(\frac{\pi}{3}\right) = \frac{\sqrt{3}}{2}$.

c) <u>Angles associés :</u>

Par différentes symétries, on obtient les formules suivantes :

	$\cos(-a) = \cos(a)$ $\sin(-a) = -\sin(a)$	$a \in \mathbb{R}$	
	$\cos(\pi - a) = -\cos(a)$ $\sin(\pi - a) = \sin(a)$		$\cos(\pi + a) = -\cos(a)$ $\sin(\pi + a) = -\sin(a)$
	$\cos\left(\frac{\pi}{2} - a\right) = \sin(a)$ $\sin\left(\frac{\pi}{2} - a\right) = \cos(a)$		$\cos\left(\frac{\pi}{2} + a\right) = -\sin(a)$ $\sin\left(\frac{\pi}{2} + a\right) = \cos(a)$

d) Exercices d'applications :

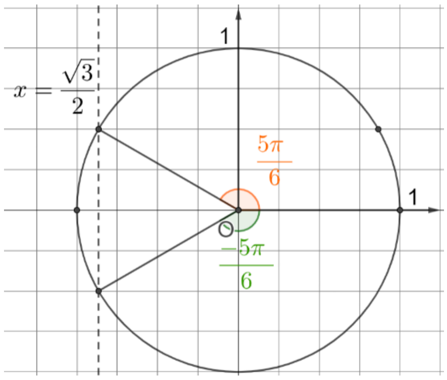
❖ **Exercice 1 : Déterminer un cosinus ou un sinus** (voir exo corrigé 6 p170)

x désigne un nombre réel de l'intervalle $[-\frac{\pi}{2};0]$ tel que $sin(x) = -\frac{1}{4}$.
Déterminer $\cos^2(x)$, puis en déduire la valeur exacte de $cos(x)$.

Pour tout nombre réel x , $\cos^2(x) + \sin^2(x) = 1$.
Ainsi, $\cos^2(x) = 1 - \sin^2(x) = 1 - \left(-\frac{1}{4}\right)^2 = \frac{15}{16}$
$\cos^2(x) = \frac{15}{16} \iff cos(x) = \frac{\sqrt{15}}{4}$ ou $cos(x) = -\frac{\sqrt{15}}{4}$,
or $x \in [-\frac{\pi}{2};0]$ donc $cos(x) \geq 0$ Ainsi, $cos(x) = \frac{\sqrt{15}}{4}$

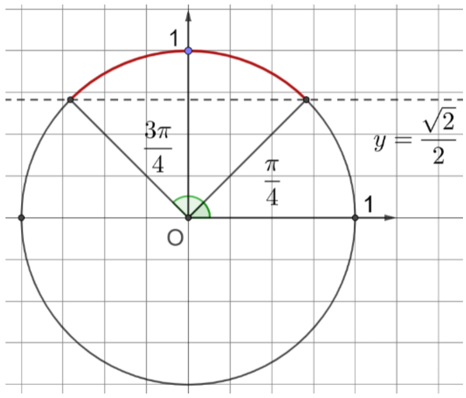
❖ **Exercice 2 : Résoudre une équation ou une inéquation trigonométrique :**

1) Résoudre sur $]-\pi;\pi[$ l'équation $cos(x) = -\frac{\sqrt{3}}{2}$.



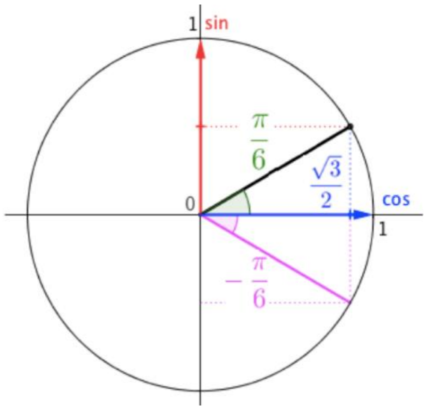
On trace la droite d'équation $x = -\frac{\sqrt{3}}{2}$ et on relève les points d'intersections entre cette droite et le cercle trigonométrique.
l'équation $cos(x) = -\frac{\sqrt{3}}{2}$ admet donc deux solutions sur $]-\pi;\pi]$:
$x_1 = \frac{5\pi}{6}$ et $x_2 = -\frac{5\pi}{6}$

2) Résoudre sur $[0;2\pi[$ l'inéquation $sin(x) \geq \frac{\sqrt{2}}{2}$.



On trace la droite d'équation $y = \frac{\sqrt{2}}{2}$ et on relève les points du cercle situés au dessus de cette droite.
Sur $[0;2\pi[$ l'inéquation $sin(x) \geq \frac{\sqrt{2}}{2}$ admet donc pour ensemble solutions
$S = [\frac{\pi}{4};\frac{3\pi}{4}]$.

3) Résoudre dans $\mathbb{R}$ $\cos x = \frac{\sqrt{3}}{2}$



$\cos x = \frac{\sqrt{3}}{2} \iff x = \frac{\pi}{6} + 2k\pi$ ou $x = -\frac{\pi}{6} + 2k\pi$ avec $k \in \mathbb{Z}$

IV – Fonctions cosinus et sinus :

a) Fonction cosinus:

Définition :

La fonction cosinus, notée cos, est la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $cos : \ x \longmapsto cos(x)$.

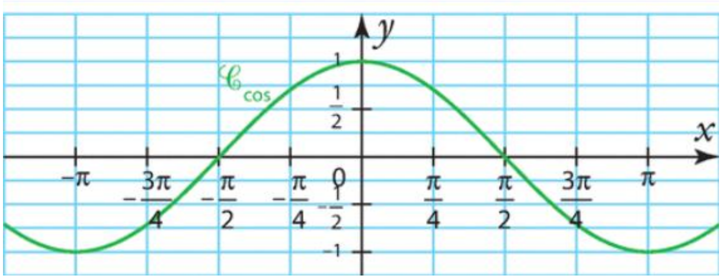
- **Un tableau de valeurs de la fonction cosinus est :**

x	$-\pi$	$-\frac{3\pi}{4}$	$-\frac{\pi}{2}$	$-\frac{\pi}{4}$	0	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{3\pi}{4}$	π
cos(x)	-1	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	0	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	1	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	0	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	-1

- **Un tableau de variation de la fonction cosinus sur $]$-$\pi ; \pi[$ est :**

x	$-\pi$		$-\frac{\pi}{2}$		0		$\frac{\pi}{2}$		π
cos	-1	↗	0	↗	1	↘	0	↘	-1

- **Courbe représentative de la fonction cosinus sur $]$-$\pi ; \pi[$**



b) Fonction sinus:

Définition :

La fonction sinus, notée sin, est la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $sin : \ x \longmapsto sin(x)$.

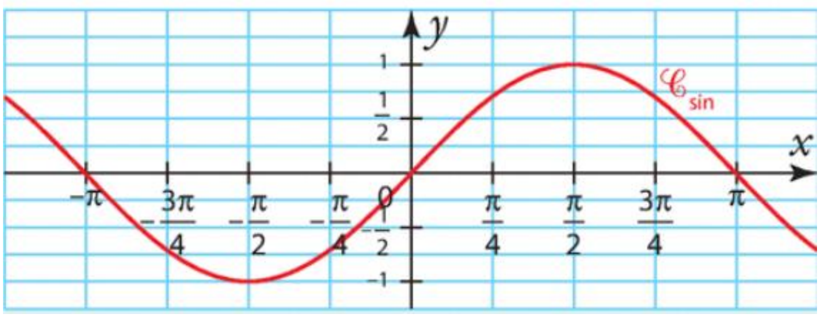
- **Un tableau de valeurs de la fonction sinus est :**

x	$-\pi$	$-\frac{3\pi}{4}$	$-\frac{\pi}{2}$	$-\frac{\pi}{4}$	0	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{3\pi}{4}$	π
sin(x)	0	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	-1	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	0	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	1	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	0

- **Un tableau de variation de la fonction sinus sur $]$-$\pi ; \pi[$ est :**

x	$-\pi$		$-\frac{\pi}{2}$		0		$\frac{\pi}{2}$		π
sin	0	↘	-1	↗	0	↗	1	↘	0

- **Courbe représentative de la fonction sinus sur $]$-$\pi ; \pi[$**



c) Périodicité:

Les fonctions sinus et cosinus sont des fonctions périodiques de période 2π .

On a donc pour tout réel x, et k entier relatif :

$$\sin(x + 2k\pi) = \sin(x)$$

$$\cos(x + 2k\pi) = \cos(x)$$

Conséquence :
Pour tracer la courbe représentative de la fonction cosinus ou de la fonction sinus, il suffit de la tracer sur un intervalle de longueur 2π et de la compléter par translation.

d) Parité :

- **La fonction cosinus est paire : pour tout réel x, $\cos(-x) = \cos(x)$**

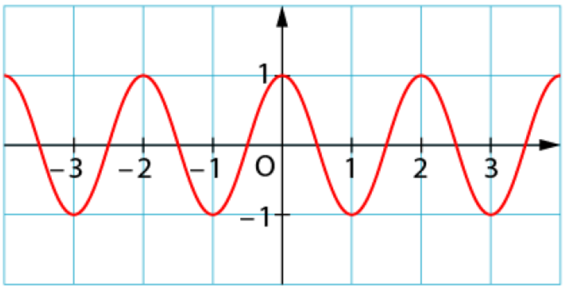
Dans un repère orthogonal, la courbe représentative de la fonction cosinus est symétrique par rapport à l'axe des ordonnées.

- **La fonction sinus est impaire : pour tout réel x, $\sin(-x) = -\sin(x)$**

Dans un repère orthogonal, la courbe représentative de la fonction sinus est symétrique par rapport à l'origine.

❖ **Exercice :**

1) Voici, dans un repère orthonormé, la courbe représentative d'une fonction g définie sur $\mathbb{R}$.



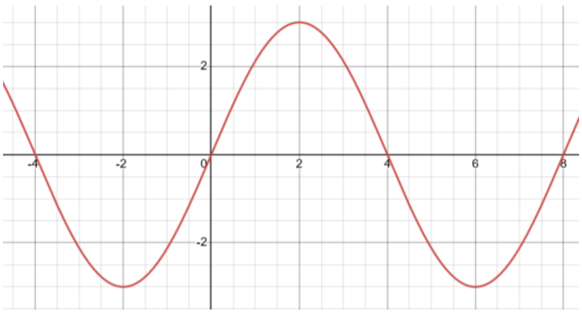
a) Lire la période de la fonction g.

La période est égale à 2

b) Entourer l'expression de $g(x)$ correspondante.

$\cdot\, sin(\pi x)$ $\cdot\, cos(\pi x)$ $\cdot\, cos(x)$ $\cdot\, sin(\pi x)$

2) h est la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = 3\sin\left(\frac{\pi}{4}x\right)$.



a) vérifier que la fonction f est périodique de période 8.
b) Etudier la parité de la fonction f.
c) Quelles transformations permettent de tracer, dans un repère $(0\,; \vec{\imath}, \vec{\jmath}\,)$, la courbe représentative de f sur l'intervalle [-4 ;12] à partir du tracé [0 ;4] ?

a) Pour tout x réel, on a :
$f(x+8) = 3\sin\left(\frac{\pi}{4}(x+8)\right) = 3\sin\left(\frac{\pi}{4}x + 2\pi\right) = 3\sin\left(\frac{\pi}{4}x\right) = f(x).$
La fonction *f* est donc périodique de période 8.

b) Pour tout x réel, on a :
$f(-x) = 3\sin\left(-\frac{\pi}{4}x\right) = -3sin\left(\frac{\pi}{4}x\right) = -f(x)$. La fonction *f* est donc impaire.
c) La fonction est impaire et de période 8 , donc , à partir du tracé de la courbe représentative de f sur l'intervalle [0 ; 4], on obtient par symétrie de centre l'origine du repère la courbe sur l'intervalle [-4 ;4] ; puis par translation de vecteur $8\vec{\imath}$ la courbe sur l'intervalle [−4 ; 12].