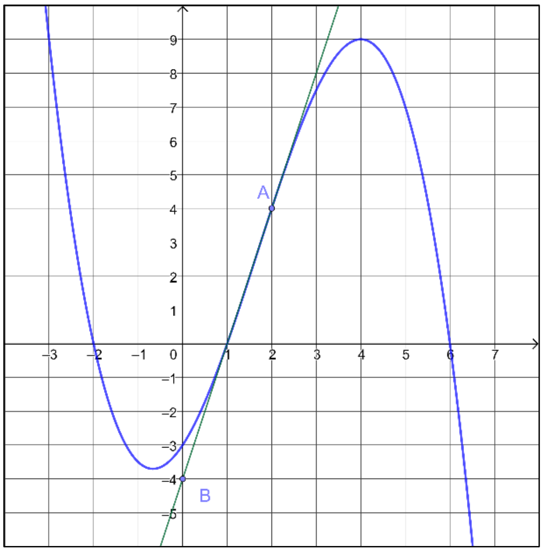
Mathématiques $1^{\text{ère}}$ EDS	Devoir en Temps Libre n°10	Correction

Exercice 1 : QCM

Pour les questions suivantes, une seule des quatre réponses proposées est exacte. Une réponse fausse, une réponse multiple ou l'absence de réponse à une question ne rapporte ni n'enlève de point. Aucune justification n'est demandée.



Question		a	b	c
Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ dont la courbe représentative C_f est donnée ci-contre.				
1	La droite (AB) est la tangente à C_f au point $A(2\,;4)$ alors on a …	$f'(0) = 4$	$f'(2) = -4$	$\mathbf{f'(2) = 4}$
2	L'équation réduite de la tangente (AB)	$\mathbf{y = 4x - 4}$	$y = -4x + 12$	$y = -4x - 4$
Soit g la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $g(x) = \frac{x^3+1}{3x^2+2}$				
3	Alors pour tout x réel, $g'(x)$ est égal à …	$\frac{3x^2}{6x}$	$\mathbf{\frac{3x^4+6x^2-6x}{(3x^2+2)^2}}$	$\frac{3x^4+6x^2+6x}{(3x^2+2)^2}$
Soit h la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $h(x) = x^3\sqrt{x}$				
4	Alors pour tout x>0 , $h'(x)$ est égal à …	$3x^2\sqrt{x} - \frac{x^3}{2\sqrt{x}}$	$3x^2 \times \frac{1}{2\sqrt{x}}$	$\mathbf{3x^2\sqrt{x} + \frac{x^3}{2\sqrt{x}}}$

Exercice 1 : Déterminer les fonctions dérivées des fonctions suivantes :

$f_1(x) = 5x^2 + 3x - 2$ La fonction polynôme f_1 est définie et dérivable sur $\mathbb{R}$ et, pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a : $f'_1(x) = 5 \times 2x + 3 \times 1 + 0 = 10x + 3$	$f_2(x) = -\frac{2}{x}$ f_2 est le produit de -2 et $\frac{1}{x}$ qui est dérivable sur]-∞ ;0[∪]0; +∞[, donc f_3 est dérivable sur]-∞ ;0[∪]0; +∞[pour tout $x \neq 0$, on a : $f'_2(x) = -2 \times \left(-\frac{1}{x^2}\right) = \frac{2}{x^2}$
$f_3(x) = 5x\sqrt{x}$ f_3 est le produit d'une fonction dérivable sur $\mathbb{R}$ et de $\sqrt{x}$ qui est dérivable sur $]0; +\infty[$, f_3 est donc dérivable sur $]0; +\infty[$ f_3 est de la forme uv avec, $\begin{cases} u(x) = 5x \quad et \quad u'(x) = 5 \\ v(x) = \sqrt{x} \quad et \quad v'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}} \end{cases}$ et, pour tout nombre réel $x > 0$, on a : $f_3'(x) = u'v + uv' = 5\sqrt{x} + 5x\frac{1}{2\sqrt{x}}$ $= \frac{5x \times \sqrt{x}}{2\sqrt{x} \times \sqrt{x}} + 5\sqrt{x} = 2{,}5\sqrt{x} + 5\sqrt{x} = 7{,}5\sqrt{x}$	$f_4(x) = \frac{3x+1}{2x-5}$ f_4 est le quotient de deux fonctions dérivable sur $\mathbb{R}$, et comme v s'annule en 2,5 , donc f_4 est dérivable sur]-∞ ;2,5[∪]2,5; +∞[f_4 est de la forme $\frac{u}{v}$ avec, $\begin{cases} u(x) = 3x + 1 \; et \; u'(x) = 3 \\ v(x) = 2x - 5 \; et \; v'(x) = 2 \end{cases}$ et, pour tout nombre réel $x \neq 2{,}5$, on a $f'_4(x) = \frac{u'v - uv'}{v^2}$ $f'_4(x) = \frac{3(2x-5)-2(3x+1)}{(2x-5)^2} = \frac{6x-15-6x-2}{(2x-5)^2} = \frac{-17}{(2x-5)^2}$

Exercice 3 :

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = 2x^3 + 3x^2 - 12x - 5$

1. Calculer $f\,'(x)$

f est une fonction polynôme, elle est donc définie et dérivable sur $\mathbb{R}$

et, pour tout nombre réel x, on a :

$f'(x) = 2 \times 3x^2 + 3 \times 2x - 12 \times 1 = 6x^2 + 6x - 12$

2. a) Résoudre l'équation $f\,'(x) = 0$

$f'(x) = 0 \Leftrightarrow 6x^2 + 6x - 12 = 0$

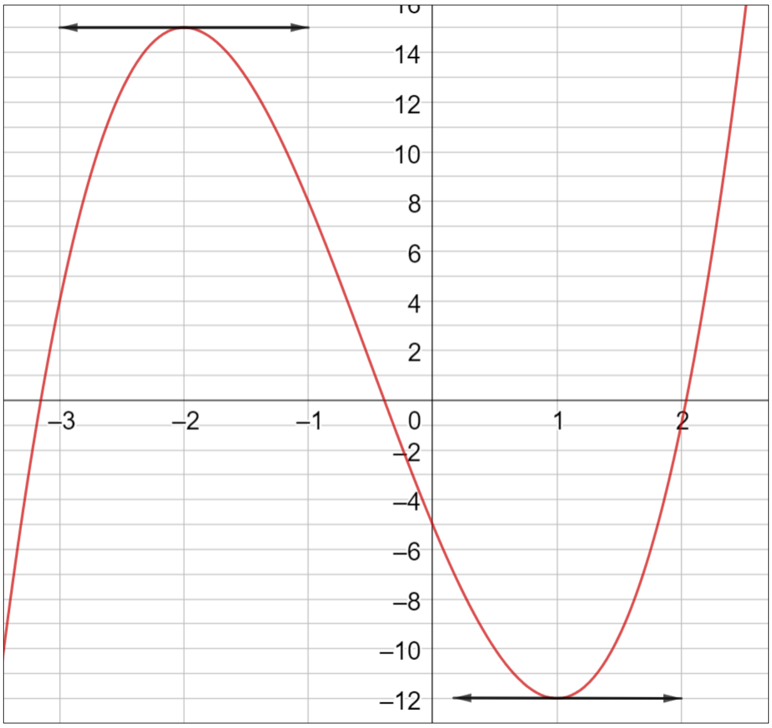
Le discriminant $\Delta = 6^2 - 4 \times 6 \times (-12) = 324 > 0$ et $\sqrt{324} = 18$

Il possède donc 2 racines : $x_1 = \frac{-6-18}{2\times6} = -2$ et $x_2 = \frac{-6-18}{2\times6} = 1$.

b) En déduire en quel(s) point(s) la courbe admet une tangente horizontale. Justifier votre réponse.

Une tangente à la courbe est horizontale si et seulement si son coefficient directeur est égal à 0, ce qui équivaut à : Résoudre $f\,'(x) = 0$, les solutions de cette équation sont les nombres -2 et 1 (voir question 2a)).

$f\,(-2) = 15$ et $f\,(1) = -12$ donc pour les points de coordonnées $(-2\,;15)$ et $(1\,;-12)$, la tangente à la courbe est horizontale.



3. Déterminer l'équation réduite de la tangente T au point A d'abscisse 0.

L'équation de la tangente en $x = a$ est : $y = f'(a)(x-a) + f(a)$

Avec $a = 0$ d'où : $y = f'(0)(x-0) + f(0)$

$f'(0) = -12$ *et* $f(0) = -5$ d'où : $y = -12x - 5$ est l'équation cherchée.

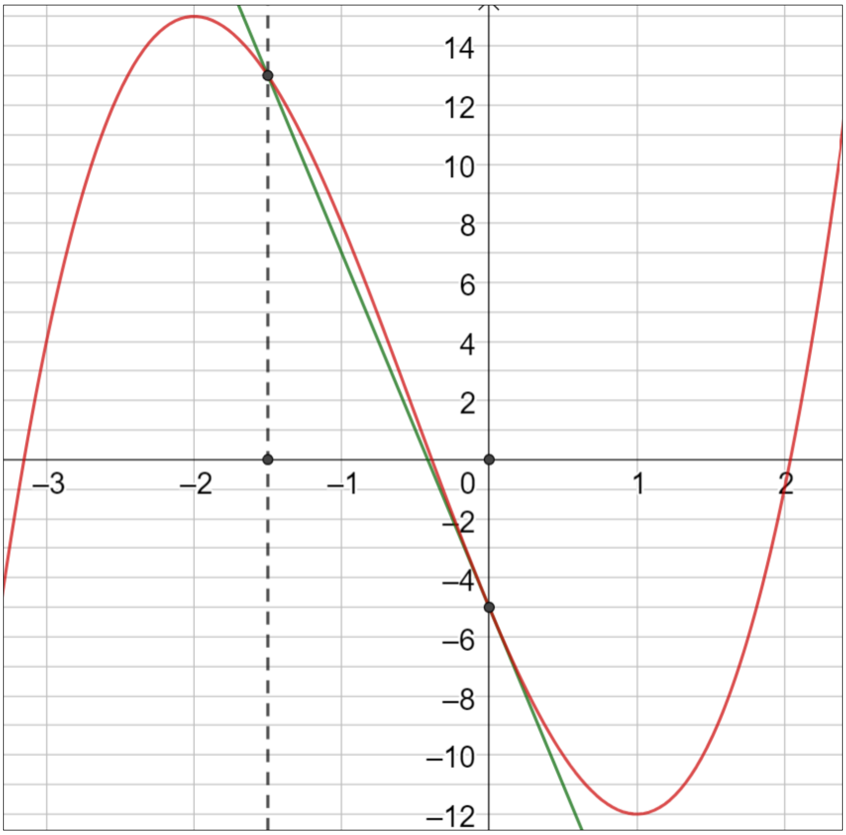
4. a) Résoudre l'équation $f\,(x) = -12x - 5$

$f\,(x) = -12x - 5 \Leftrightarrow 2x^3 + 3x^2 - 12x - 5 = -12\,x - 5 \Leftrightarrow 2x^3 + 3x^2 = 0 \Leftrightarrow x^2(2x+3) = 0$

$\Leftrightarrow x^2(2x+3) = 0 \Leftrightarrow x^2 = 0$ ou $2x + 3 = 0$ S= $\{0\,; -\frac{3}{2}\}$

b) En déduire que la tangente (T) coupe la courbe représentative de f en deux points dont on précisera les coordonnées.

$f\left(-\frac{3}{2}\right) = 13$ et $f(0) = -5$, donc la tangente T coupe la courbe représentative de f , en deux points de coordonnées $(-\frac{3}{2}; 13)$ et $(0\,; -5)$



Exercice 4 :

Une entreprise fabrique de l'engrais. Le coût total journalier pour la production de x tonnes d'engrais est modélisé par la fonction $C(x) = 8x^3 - 390x^2 + 5180x + 750$ où x est compris entre 1 et 20.
Chaque tonne d'engrais est vendue 680 €

1.a) Quel est le coût de production exact de 10 tonnes d'engrais ? de 11 tonnes d'engrais ?

$$C(10) = 8 \times 10^3 - 390 \times 10^2 + 5180 \times 10 + 750 = 21\,550$$

$$C(11) = 8 \times 11^3 - 390 \times 11^2 + 5180 \times 11 + 750 = 21\,188$$

b) En déduire l'augmentation du coût entrainé par la fabrication de la 11ème tonne d'engrais.

$$21\,188 - 21550 = -362$$

2. a) Déterminer la fonction $C'(x)$ qui modélise le coût marginal de production qui peut être assimilé à la dérivée du coût total.

La fonction C est une fonction polynôme, elle est donc définie et dérivable sur $[1; 20]$ et, pour tout nombre réel x de $[1; 20]$ on a :

$C'(x) = 8 \times 3x^2 - 390 \times 2x + 5180 \times 1 = 24x^2 - 780x + 5180$

Le coût marginal en fonction de x tonnes produites est modélisé par la fonction $C'(x) = 24x^2 - 780x + 5180$

b) Calculer le coût marginal de production au rang 10, retrouve-t-on un résultat proche de la question 1b).

$C'(10) = 24 \times 10^2 - 780 \times 10 + 5180 = -220$

2. La production de l'entreprise doit être telle que le coût marginal de fabrication soit inférieur au prix de vente. En déduire les quantités, en tonnes, que peut produire l'entreprise. Justifier votre réponse.

Cette entreprise vend chaque tonne d'engrais 680 € , la recette d'une tonne vaut donc 680.
Pour que l'entreprise réalise un bénéfice, il faut que le coût marginal soit inférieur au prix de vente d'une tonne.
On doit donc résoudre l'inéquation : $C'(x) \leq 680 \Leftrightarrow 24x^2 - 780x + 5180 \leq 680$
$$\Leftrightarrow 24x^2 - 780x + 4500 \leq 0$$

Le discriminant $\Delta = (-780)^2 - 4 \times 24 \times 4500 = 176400 > 0$ et $\sqrt{176400} = 420$
Il possède donc 2 racines réelles : $x_1 = \frac{-(-780)-420}{2\times24} = 7{,}5$ et $x_2 = \frac{-(-780)+420}{2\times24} = 25$.
Or un polynôme est du signe de a (ici $a = 24 > 0$) sauf entre ses deux racines

On en déduit le tableau de signes suivant :

x	1		7,5		20		25	
$C'(x) - 680$		+	0	-			0	+

S=[7,5; 20]
Pour $x \in]7{,}5; 20[$, le coût marginal est inférieur ou égale au prix de vente pour une production comprise entre 7,5 et 20 tonnes.

Exercice 5 :

À l'issue d'une étude conduite pendant plusieurs années, on modélise l'évolution du prix du m² d'un appartement neuf dans une ville française de la manière suivante :
À partir d'un prix de 4 200 € le m² en 2019, on applique chaque année une augmentation annuelle de 3 % .
1. Avec ce modèle, montrer que le prix du m² d'un appartement neuf dans cette ville en 2021 serait de 4 455,78 €.

Une augmentation de 3% correspond à un coefficient égal à 1,03, ici le prix à subit deux augmentations de 3%, donc le prix en 2021 devrait être de $4200 \times 1{,}03^2 = 4\,455{,}78$ €

2. On considère la suite de terme général u_n qui permet d'estimer, avec ce modèle, le prix en euro du m² d'un appartement neuf l'année 2019+n. On a donc u_0=4 200 €

a) Quelle est la nature de la suite (u_n) ? En préciser la raison.

La formule par récurrence de cette suite est $u_{n+1} = 1{,}03 \times u_n$

La suite (u_n) est une suite géométrique de raison 1,03 et de premier terme u_0=4 200.

b) En déduire l'expression du terme général u_n en fonction de n, pour tout entier naturel n.

(u_n) est une suite géométrique, on a donc pour tout entier naturel n :

$$u_n = u_0 \times q^n = 4200 \times 1{,}03^n$$

c) Selon ce modèle, pourra-t-on acheter en 2024, un appartement de 40 m² si l'on dispose d'une somme de 200 000 € ?

L'année 2024, correspond au rang $n = 5$, on aura donc $u_n = 4200 \times 1{,}03^5 \approx 4868{,}95$€/m².

Pour un appartement de 40m², cela correspond à : $40 \times 4868{,}95 = 194\,758$

$194\,758 < 200\,000$. On pourra donc acheter l'appartement.

3. On définit, en langage Python, la fonction seuil ci-dessous.

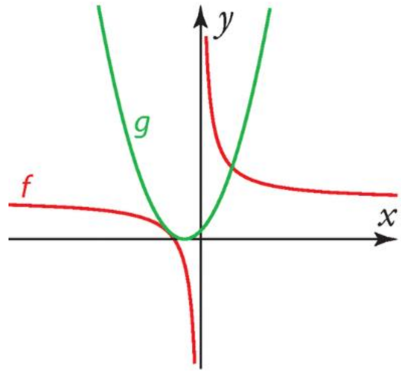
Recopier et compléter les lignes 5 et 7 de sorte que cette fonction renvoie le nombre d'années nécessaires pour que, selon ce modèle, le prix du m² d'un appartement neuf dépasse 8 000 €.

```
1  def seuil():
2      u = 4200
3      n = 0
4      while u <= 8000:
5          u = u * 1.03
6          n = n + 1
7      return n
```

En exécutant le programme, on obtient $n = 22$
Cela signifie qu'en 2 041 (2019+22), le prix du m² dépassera 8 000€

Exercice 6*:

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}^*$ par $f(x) = \frac{5x+4}{4x}$ et $\mathcal{C}_f$ sa courbe représentative.
Soit g la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $g(x) = x^2 + x + \frac{1}{4}$ et $\mathcal{C}g$ sa courbe représentative.



1. Montrer que, pour tout réel x non nul : $g(x) - f(x) = \frac{(x-1)(x+1)^2}{x}$

$$g(x) - f(x) = x^2 + x + \frac{1}{4} - \frac{5x+4}{4x} = \frac{4x^3}{4x} + \frac{4x^2}{4x} + \frac{x}{4x} - \frac{5x+4}{4x}$$

$$= \frac{4x^3 + 4x^2 + x - 5x - 4}{4x} == \frac{4x^3 + 4x^2 - 4x - 4}{4x} = \frac{x^3 + x^2 - x - 1}{x}$$

Or $(x-1)(x+1)^2 = (x-1)(x^2+2x+1) = x^3 + 2x^2 + x - x^2 - 2x - 1 = x^3 + x^2 - x - 1$

Donc $g(x) - f(x) = \frac{x^3+x^2-x-1}{x}$

2. En déduire les abscisses des points d'intersection des courbes $\mathcal{C}_f$ et $\mathcal{C}_g$ puis la position relative des courbes $\mathcal{C}_f$ et $\mathcal{C}_g$.
Pour connaître les points d'intersection de $\mathcal{C}_f$ et $\mathcal{C}_g$, on doit résoudre :
$g(x) - f(x) = 0 \Leftrightarrow \frac{(x-1)(x+1)^2}{x} = 0$
Pour tout nombre réel $x \neq 0$ on a :
$\frac{(x-1)(x+1)^2}{x} = 0 \Leftrightarrow (x-1)(x+1)^2 = 0 \Leftrightarrow x - 1 = 0$ ou $x + 1 = 0$
$\Leftrightarrow x = 1$ ou $x = -1$
Par conséquent, les courbes $\mathcal{C}_f$ et $\mathcal{C}_g$ se coupent en $x = 1$ et $x = -1$
Etudions le signe de $g(x) - f(x)$ sur $\mathbb{R}^*$.

x	$-\infty$		-1		0		1		$+\infty$
$x-1$		$-$	|	$-$	|	$-$	0	$+$	
$(x-1)^2$		$+$	0	$+$	|	$+$	|	$+$	
x		$-$	|	$-$	0	$+$	|	$+$	
$g(x) - f(x)$		$+$	0	$+$	||	$-$	0	$+$	

Donc $g(x) - f(x) \geq 0$ sur $]-\infty; 0[\cup [1; +\infty[$.

Ce qui signifie que $\mathcal{C}_g$ est au-dessus de $\mathcal{C}_f$ sur $]-\infty; 0[\cup [1; +\infty[$ et $\mathcal{C}_g$ est en dessous de $\mathcal{C}_f$ sur $]0; 1]$

3. Montrer que les courbes $\mathcal{C}_f$ et $\mathcal{C}_g$ admettent la même tangente au point A d'abscisse − 1.
On dit alors que les courbes sont tangentes en − 1.

- f est le quotient de deux fonctions dérivable sur $\mathbb{R}$, et comme v s'annule en 0 , donc f est dérivable sur $]-\infty;0[\cup]0;+\infty[$,

f est de la forme $\frac{u}{v}$ avec $\begin{cases} u(x) = 5x + 4 \; et \; u'(x) = 5 \\ v(x) = 4x \;\; et \; v'(x) = 4 \end{cases}$ et $f'(x) = \frac{u\prime v - uv\prime}{v^2}$

Pour tout nombre réel $x \neq 0$, on a

$$f'(x) = \frac{5 \times 4x - 4 \times (5x+4)}{(4x)^2} = \frac{20x - 20x - 16}{16x^2} = \frac{-16}{16x^2} = \frac{-1}{x^2}$$

- Pour $x = -1$, $f'(-1) = \frac{-1}{(-1)^2} = -1$ et $f(-1) = \frac{5\times(-1)+4}{4\times(-1)} = \frac{-1}{-4} = \frac{1}{4}$

L'équation de la tangente est donc $y = f'(-1)\big(x - (-1)\big) + f(-1) = -1(x+1) + \frac{1}{4}$
Soit $y = -x - \frac{3}{4}$

- g est une fonction polynôme est dérivable sur $\mathbb{R}$, et pour tout nombre réel x on a :

$$g'(x) = 2x + 1$$

- Pour $x = -1$, $g'(1) = 2 \times 1 + 1 = \frac{-1}{1^2} = -1$ et $g(1) = (-1)^2 + (-1) + \frac{1}{4} = \frac{1}{4}$

L'équation de la tangente est donc aussi $y = -x - \frac{3}{4}$

Donc, au point A d'abscisse -1 , la tangente à $\mathcal{C}_f$ est confondue avec la tangente à $\mathcal{C}_g$.