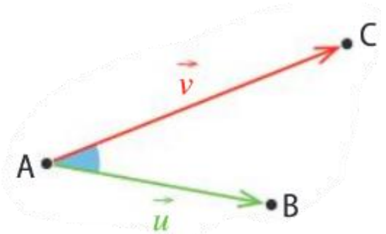
Expression avec le cosinus

Soit $\vec{u} = \overrightarrow{AB}$ et $\vec{v} = \overrightarrow{AC}$ des vecteurs non nuls.

$$\boldsymbol{\vec{u}.\vec{v} = \overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC} = \|\vec{u}\| \times \|\vec{v}\| \times \cos(\widehat{BAC})}$$

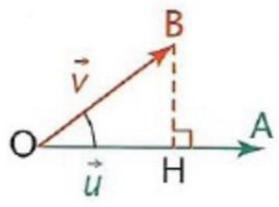


Expression avec le projeté orthogonal

Pour tous vecteurs non nuls $\vec{u} = \overrightarrow{OA}$ et $\vec{v} = \overrightarrow{OB}$, si H est le projeté orthogonal de B sur (OA), alors :

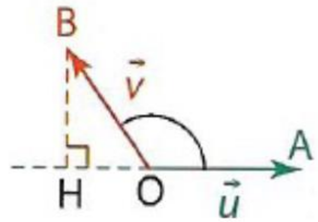
$\overrightarrow{OB}$ et $\overrightarrow{OA}$ de même sens

$$\boldsymbol{\vec{u}.\vec{v} = \mathrm{OA} \times \mathrm{OH}}$$



$\overrightarrow{OB}$ et $\overrightarrow{OA}$ de sens contraire

$$\boldsymbol{\vec{u}.\vec{v} = -\mathrm{OA} \times \mathrm{OH}}$$



Propriétés du produit scalaire

Pour tout vecteurs $\vec{u}, \vec{v}$ et $\vec{w}$:

✧ Symétrie:

$$\boldsymbol{\vec{u}.\vec{v} = \vec{v}.\vec{u}}$$

✧ Bilinéarité:

$$\vec{u}.(\vec{v} + \vec{w}) = \vec{u}.\vec{v} + \vec{u}.\vec{w}$$

$$\boldsymbol{\|\vec{u} + \vec{v}\|^2 = \|\vec{u}\|^2 + 2\vec{u}.\vec{v} + \|\vec{v}\|^2}$$

$$\boldsymbol{\|\vec{u} - \vec{v}\|^2 = \|\vec{u}\|^2 - 2\vec{u}.\vec{v} + \|\vec{v}\|^2}$$

✧ Expression avec les normes :

$$\boldsymbol{\vec{u}.\vec{v} = \frac{1}{2}\left(\|\vec{u}\|^2 + \|\vec{v}\|^2 - \|\vec{u} - \vec{v}\|^2\right)}$$

$$\boldsymbol{\vec{u}.\vec{v} = \frac{1}{2}\left(\|\vec{u} + \vec{v}\|^2 - \|\vec{u}\|^2 - \|\vec{v}\|^2\right)}$$

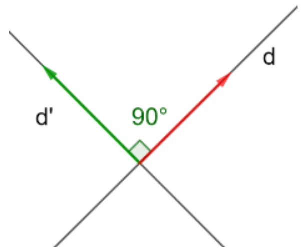
Expression analytique

Soient $\vec{u}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ et $\vec{v}\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}$ dans une base.

✧ $\boldsymbol{\vec{u}.\vec{v} = xx' + yy'}$

✧ $\boldsymbol{\vec{u}^2 = \vec{u}.\vec{u} = \|\vec{u}\|^2}$

✧ $\boldsymbol{\|\vec{u}\| = \sqrt{x^2 + y^2}}$



✧ $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont orthogonaux $\Leftrightarrow \boldsymbol{\vec{u} \perp \vec{v} \Leftrightarrow \vec{u}.\vec{v} = 0}$

✧ d et d'perpendiculaires ⟺ vecteurs normaux orthogonaux