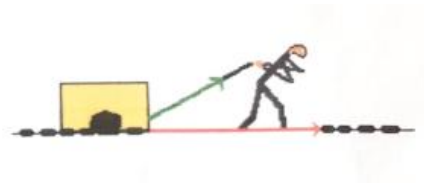


Mathématiques 1 ^{ère} EDS	Chapitre 7 : Produit scalaire dans le plan (définitions)	Géométrie
---------------------------------------	---	-----------

I – Expressions du produit scalaire :

a) La notion de produit scalaire en physique

La notion de produit scalaire est apparue pour les besoins de la physique. Le concept est relativement récent et a été introduit au milieu du XIX^e siècle.



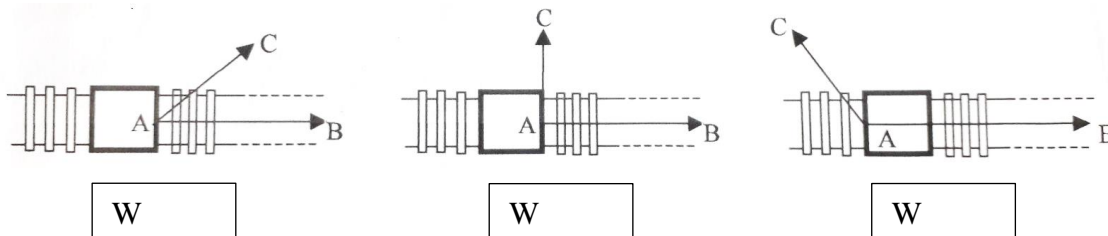
Principe : En physique, on modélise les « forces » s'exerçant sur un objet par un vecteur : il est caractérisé par sa direction, son sens, et sa longueur dépendant de la valeur de la force.

Le **travail d'une force constante** \vec{AC} durant le déplacement de A vers B est le **nombre réel** :

$$W = \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} \text{ on lit } \overrightarrow{AB} \text{ scalaire } \overrightarrow{AC} \text{ et l'on obtient un réel.}$$

Conséquence : Le travail W d'une telle force est

- Positif lorsque la force favorise le déplacement (travail moteur)
- Nul lorsque la force ne contribue pas au déplacement (travail nul)
- Négatif lorsque la force s'oppose au déplacement (travail résistant)



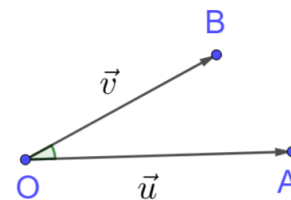
b) Définition avec le cosinus :

Définition :

Soient \vec{u} et \vec{v} deux vecteurs tels que $\vec{u} = \overrightarrow{OA}$ et $\vec{v} = \overrightarrow{OB}$

Leur produit scalaire est le nombre réel noté $\vec{u} \cdot \vec{v}$ défini par :

- $\vec{u} \cdot \vec{v} = \|\vec{u}\| \times \|\vec{v}\| \times \cos(\widehat{AOB}) = OA \times OB \times \cos(\widehat{AOB})$
- Si $\vec{u} = \vec{0}$ ou $\vec{v} = \vec{0}$, alors $\vec{u} \cdot \vec{v} = 0$
- On appelle carré scalaire du vecteur \overrightarrow{AB} , le nombre $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AB} = \|\overrightarrow{AB}\|^2 = AB^2 = AB^2$

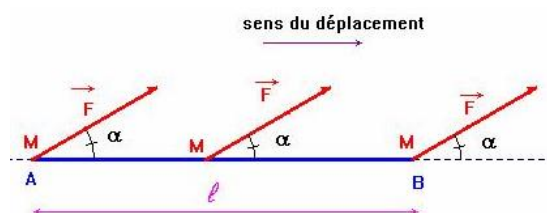


Remarque : Le produit scalaire $\vec{u} \cdot \vec{v}$ est indépendant des représentants des vecteurs \vec{u} et \vec{v} . On peut donc choisir des vecteurs \vec{u} et \vec{v} de même origine

❖ Exemple d'application en Physique :

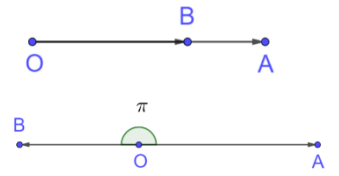
En physique, les forces sont exprimées en Newton (N), les distances en mètres (m) et le travail d'une force lors d'un déplacement s'exprime en Joules (J) et le travail est noté W. 1 Joule correspond donc au travail d'une force de 1 Newton qui déplace son point d'application de 1 mètre.

Dans la situation ci-dessous, calculer le travail de la force \vec{F} sachant que $F = 100 \text{ N}$, $\ell = 7,70 \text{ cm}$ et $\alpha = 30^\circ$



Propriétés :

- Si \overrightarrow{OA} et \overrightarrow{OB} sont colinéaires et de même sens, alors $\overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{OB} = OA \times OB$
- Si \overrightarrow{OA} et \overrightarrow{OB} sont colinéaires et sens contraires, alors $\overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{OB} = -OA \times OB$



En effet, si $\widehat{AOB} = 0$, alors $\cos(\widehat{AOB}) = 1$ et si $\widehat{AOB} = \pi$, alors $\cos(\widehat{AOB}) = -1$

❖ Exercices d'applications :

1) Dans des cas suivants, calculer le produit scalaire $\vec{u} \cdot \vec{v}$: avec $\vec{u} = \overrightarrow{OA}$ et $\vec{v} = \overrightarrow{OB}$

a) $\|\vec{u}\| = 2, \|\vec{v}\| = 3$ et $\widehat{AOB} = 30^\circ$

b) $\|\vec{u}\| = 8, \|\vec{v}\| = \sqrt{2}$ et $\widehat{AOB} = \frac{3\pi}{4}$ radians

2) Déterminer une valeur en radian de l'angle géométrique \widehat{AOB} dans chacun des cas suivants :

a) $\|\vec{u}\| = 6, \|\vec{v}\| = 2$ et $\vec{u} \cdot \vec{v} = 6$

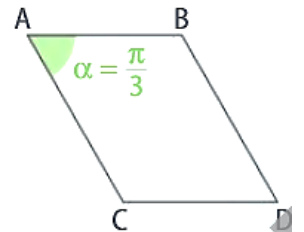
b) $\|\vec{u}\| = 2, \|\vec{v}\| = \sqrt{3}$ et $\vec{u} \cdot \vec{v} = \sqrt{6}$

2) Soit ABDC un parallélogramme tel que $AB=4, AC=5$ et $\widehat{BAC} = \frac{\pi}{3}$

a) Calculer $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC}$

b) Calculer $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{CD}$

c) Calculer $\overrightarrow{DB} \cdot \overrightarrow{CD}$



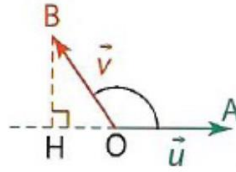
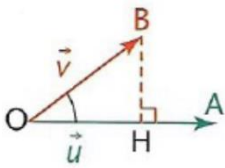
c) Expression du produit scalaire à l'aide d'un projeté orthogonal :

Définition :

Pour tous vecteurs non nuls $\vec{u} = \overrightarrow{OA}$ et $\vec{v} = \overrightarrow{OB}$, si H est le projeté orthogonal de B sur (OA), alors :

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = OA \times OH$$

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = -OA \times OH$$



❖ Démonstration :

Par définition $\overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{OB} = OA \times OB \times \cos(\widehat{AOB})$

- Dans le cas où \overrightarrow{OA} et \overrightarrow{OB} sont de même sens, l'angle \widehat{AOB} est inférieur à 90° donc $\cos(\widehat{AOB}) = \cos(\widehat{HOB})$. Or dans le triangle HOB, on a $\cos(\widehat{HOB}) = \frac{OH}{OB}$.
Donc $\overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{OB} = OA \times OB \times \cos(\widehat{HOB}) = OA \times OB \times \frac{OH}{OB} = OA \times OH$
- Dans le cas où \overrightarrow{OA} et \overrightarrow{OB} sont de sens contraire, l'angle \widehat{AOB} est supérieur à 90° donc $\widehat{AOB} = 180^\circ - \widehat{BOH}$ et donc $\cos(\widehat{AOB}) = \cos(180^\circ - \widehat{BOH}) = -\cos(\widehat{BOH})$, or dans le triangle HOB, on a $\cos(\widehat{HOB}) = \frac{OH}{OB}$.

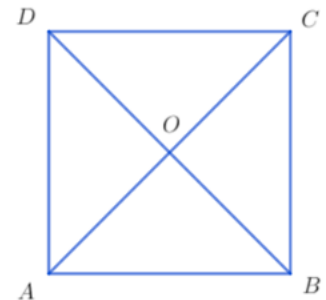
$$\text{Donc } \overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{OB} = OA \times OB \times (-\cos(\widehat{HOB})) = OA \times OB \times \left(-\frac{OH}{OB}\right) = -OA \times OH$$

❖ Exercices d'applications :

On considère le carré ABCD de centre O et de côté 6.

Calculer les produits scalaires suivants :

- 1) $\overrightarrow{AD} \cdot \overrightarrow{AO}$ 2) $\overrightarrow{OB} \cdot \overrightarrow{OD}$ 3) $\overrightarrow{BO} \cdot \overrightarrow{BC}$ 4) $\overrightarrow{AO} \cdot \overrightarrow{OC}$ 5) $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{OD}$



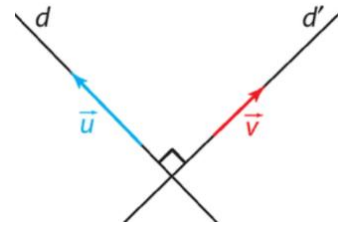
d) Produit scalaire et orthogonalité :

Définition et propriété :

Deux vecteurs non nuls \vec{u} et \vec{v} sont dit **orthogonaux** si les droites qui les supportent sont **perpendiculaires**.
Le vecteur nul est orthogonal à tout vecteur.

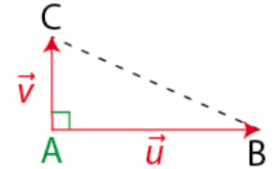
Deux vecteurs \vec{u} et \vec{v} sont orthogonaux si et seulement si leur produit scalaire est nul :

$$\vec{u} \perp \vec{v} \Leftrightarrow \vec{u} \cdot \vec{v} = 0$$



❖ Démonstration :

$\vec{u} = \overrightarrow{AB}$ et $\vec{v} = \overrightarrow{AC}$ sont des vecteurs non nuls : \vec{u} est orthogonal à \vec{v} équivaut à A est le projeté orthogonal de C sur la droite (AB), donc $\vec{u} \cdot \vec{v} = AB \times AA = 0$



II – Propriétés du produit scalaire :

Soit \vec{u} , \vec{v} et \vec{w} et k un nombre réel, on a pour tous vecteurs \vec{u} et \vec{v}

✦ Propriété de symétrie:

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = \vec{v} \cdot \vec{u}$$

✦ Opérations sur les produits scalaires :

$$\vec{u} \cdot (\vec{v} + \vec{w}) = \vec{u} \cdot \vec{v} + \vec{u} \cdot \vec{w} \quad \vec{u} \cdot (k\vec{v}) = k\vec{u} \cdot \vec{v}.$$

✦ Identités remarquables :

$(\vec{u} + \vec{v})^2 = \vec{u}^2 + 2\vec{u} \cdot \vec{v} + \vec{v}^2$	$(\vec{u} - \vec{v})^2 = \vec{u}^2 - 2\vec{u} \cdot \vec{v} + \vec{v}^2$	$(\vec{u} + \vec{v})(\vec{u} - \vec{v}) = \vec{u}^2 - \vec{v}^2$
--	--	--

III – Autres expressions du produit scalaire:

a) Expression analytique du produit scalaire :

Propriété :

Dans une base orthonormée, si les vecteurs \vec{u} et \vec{v} ont pour coordonnées respectives

$$\vec{u} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \text{ et } \vec{v} \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} \text{ on a alors } \vec{u} \cdot \vec{v} = xx' + yy'$$

❖ Exemple :

Soit $\vec{u}(5 ; -4)$ et $\vec{v}(-3 ; 7)$ deux vecteurs. Calculer le produit scalaire $\vec{u} \cdot \vec{v}$

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = 5 \times (-3) + (-4) \times 7 = -15 - 28 = -43$$

Dans un repère **orthonormé**, soit un vecteur \vec{u} de coordonnées $(x ; y)$

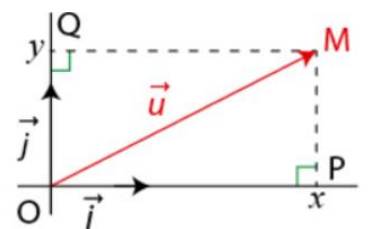
La **norme du vecteur** \vec{u} notée $\|\vec{u}\|$, est la distance OM.

Elle est égale à $\|\vec{u}\| = \sqrt{x^2 + y^2}$ et on note $\|\vec{u}\|^2 = \vec{u}^2 = x^2 + y^2$

En effet, on a d'une part $\vec{u}^2 = \vec{u} \cdot \vec{u} = x^2 + y^2$ et d'autre part $\vec{u} \cdot \vec{u} = \|\vec{u}\|^2$

Dans un plan muni d'un repère orthonormé, si les vecteurs \vec{u} et \vec{v} ont pour coordonnées respectives

$$\vec{u} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \text{ et } \vec{v} \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} \text{ on a alors } \vec{u} \perp \vec{v} \Leftrightarrow \vec{u} \cdot \vec{v} = 0 \Leftrightarrow xx' + yy' = 0$$



Soit $\vec{u}(5; 1)$. Calculer $\|\vec{u}\|$:

Dans une base orthonormée, on donne les vecteurs $\vec{u}(\sqrt{5} - 2; -1)$ et $\vec{v}(\sqrt{5} + 2; 1)$, déterminer si ces vecteurs sont orthogonaux.

b) Développement de $\|\vec{u} + \vec{v}\|^2$ et $\|\vec{u} - \vec{v}\|^2$:

Soit \vec{u}, \vec{v} deux vecteurs

$$\|\vec{u} + \vec{v}\|^2 = \|\vec{u}\|^2 + 2\vec{u} \cdot \vec{v} + \|\vec{v}\|^2$$

$$\|\vec{u} - \vec{v}\|^2 = \|\vec{u}\|^2 - 2\vec{u} \cdot \vec{v} + \|\vec{v}\|^2$$

c) Expressions du produit scalaire à l'aide de normes :

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = \frac{1}{2} (\|\vec{u}\|^2 + \|\vec{v}\|^2 - \|\vec{u} - \vec{v}\|^2)$$

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = \frac{1}{2} (\|\vec{u} + \vec{v}\|^2 - \|\vec{u}\|^2 - \|\vec{v}\|^2)$$

❖ **Exercice application :**

ABC est un triangle tel que : $CG = 6$, $CF = 7$, $FG = 3$, Calculer $\overrightarrow{CG} \cdot \overrightarrow{CF}$.

