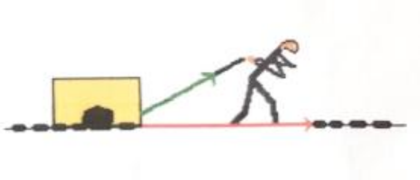
Mathématiques $1^{\text{ère}}$ EDS	<u>Chapitre 7 :</u> **Produit scalaire dans le plan (définitions)**	**Géométrie**

I – Expressions du produit scalaire :

a) La notion de produit scalaire en physique



La notion de produit scalaire est apparue pour les besoins de la physique. Le concept est relativement récent et a été introduit au milieu du XIXe siècle .

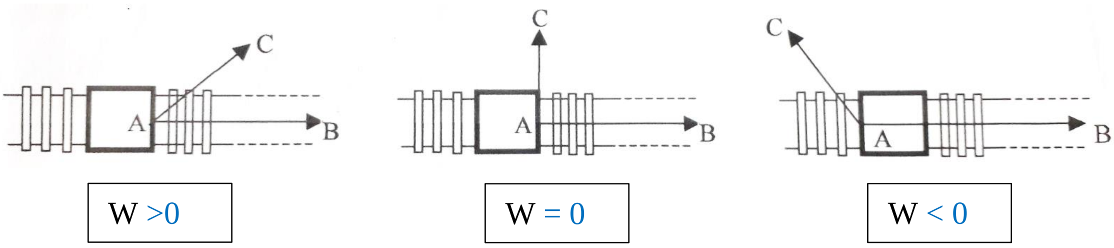
<u>Principe :</u> En physique, on modélise les « forces » s'exerçant sur un objet par un vecteur : il est caractérisé par sa direction, son sens, et sa longueur dépendant de la valeur de la force.

Le **travail d'une force constante** $\overrightarrow{AC}$ durant le déplacement de A vers B est le **nombre réel :**

$W = \overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC}$ on lit $\overrightarrow{AB}$ scalaire $\overrightarrow{AC}$ et l'on obtient un réel .

<u>Conséquence</u> : Le travail W d'une telle force est

- Positif lorsque la force favorise le déplacement (travail moteur)
- Nul lorsque la force ne contribue pas au déplacement (travail nul)
- Négatif lorsque la force s'oppose au déplacement (travail résistant)

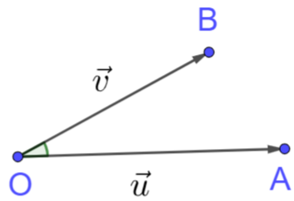


b) Définition avec le cosinus :

Définition :

Soient $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs tels que $\vec{u} = \overrightarrow{OA}$ et $\vec{v} = \overrightarrow{OB}$

Leur produit scalaire est le nombre réel noté $\boldsymbol{\vec{u}.\vec{v}}$ défini par :



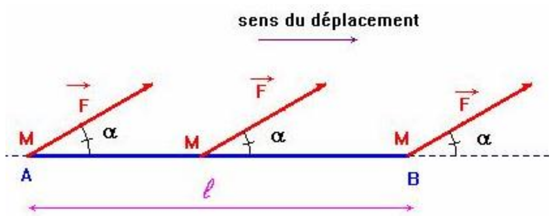
- $\boldsymbol{\vec{u}.\vec{v}} = \|\boldsymbol{\vec{u}}\| \times \|\boldsymbol{\vec{v}}\| \times \mathbf{cos}(\boldsymbol{\vec{u}};\boldsymbol{\vec{v}}) = \boldsymbol{OA} \times \boldsymbol{OB} \times \mathbf{cos}\,(\widehat{\boldsymbol{AOB}})$
- Si $\vec{u} = \vec{0}$ *ou* $\vec{v} = \vec{0}$, alors $\vec{u}.\vec{v} = 0$
- On appelle carré scalaire du vecteur $\overrightarrow{AB}$, le nombre $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AB} = \|\overrightarrow{AB}\| = \overrightarrow{AB}^2 = AB^2$

Remarque : Le produit scalaire $\vec{u}.\vec{v}$ est indépendant des représentants des vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$. On peut donc choisir des vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ de même origine

❖ **<u>Exemple d'application en Physique :</u>**

En physique, les forces sont exprimées en Newton (N), les distances en mètres (m) et le travail d'une force lors d'un déplacement s'exprime en Joules (J) et le travail est noté W. 1 Joule correspond donc au travail d'une force de 1 Newton qui déplace son point d'application de 1 mètre.

Dans la situation ci-dessous, calculer le travail de la force $\vec{F}$ sachant que F = 100 N, ℓ = 7,70 cm et α = 30 °

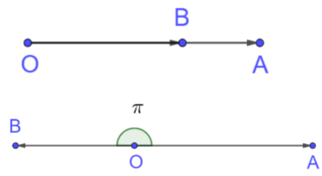


$W = \vec{F}.\vec{\ell} = 100 \times 0{,}077 \times \cos(30°)$

$= 100 \times 0{,}077 \times \frac{\sqrt{3}}{2} \approx 6{,}67\,J\ (joules)$

Propriétés :

- Si $\overrightarrow{OA}$ et $\overrightarrow{OB}$ sont colinéaires et de même sens, alors $\overrightarrow{OA}.\overrightarrow{OB} = \mathrm{OA} \times \mathrm{OB}$
- Si $\overrightarrow{OA}$ et $\overrightarrow{OB}$ sont colinéaires et sens contraires, alors $\overrightarrow{OA}.\overrightarrow{OB} = -\mathrm{OA} \times \mathrm{OB}$



En effet, si $\widehat{AOB} = 0$, alors $\cos(\widehat{AOB}) = 1$ et si $\widehat{AOB} = \pi$, alors $\cos(\widehat{AOB}) = -1$

❖ **Exercices d'applications :**

1) Dans des cas suivants, calculer le produit scalaire $\vec{u}.\vec{v}$: avec $\vec{u} = \overrightarrow{OA}$ et $\vec{v} = \overrightarrow{OB}$

a) $\|\vec{u}\| = 2, \|\vec{v}\| = 3 \ et \ \widehat{AOB} = 30°$

$\vec{u}.\vec{v} = \|\vec{u}\| \times \|\vec{v}\| \times \cos(\widehat{AOB}) = 2 \times 3 \times \cos(30°)$

$= 2 \times 3 \times \frac{\sqrt{3}}{2} = 3\sqrt{3}$

b) $\|\vec{u}\| = 8, \|\vec{v}\| = \sqrt{2} \ et \ \widehat{AOB} = \frac{3\pi}{4}$ radians

$\vec{u}.\vec{v} = \|\vec{u}\| \times \|\vec{v}\| \times \cos(\widehat{AOB}) = 8 \times \sqrt{2} \times \cos\left(\frac{3\pi}{4}\right)$

$= 8 \times \sqrt{2} \times \left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = \frac{-8\times\sqrt{2}\times\sqrt{2}}{2} = -8$

2) Déterminer une valeur en radian de <u>l'angle géométrique</u> $\widehat{AOB}$ dans chacun des cas suivants :

a) $\|\vec{u}\| = 6, \|\vec{v}\| = 2 \ et \ \vec{u}.\vec{v} = 6$

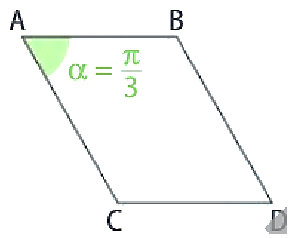
$$\vec{u}.\vec{v} = \|\vec{u}\| \times \|\vec{v}\| \times \cos(\widehat{AOB})$$
$$\Leftrightarrow 6 = 2 \times 6 \times \cos(\widehat{AOB})$$
$$\Leftrightarrow \frac{6}{12} = \frac{1}{2} = \cos(\widehat{AOB})$$
$$\Leftrightarrow \widehat{AOB} = \frac{\pi}{3}$$

b) $\|\vec{u}\| = 2, \ \|\vec{v}\| = \sqrt{3} \ et \ \vec{u}.\vec{v} = \sqrt{6}$

$$\vec{u}.\vec{v} = \|\vec{u}\| \times \|\vec{v}\| \times \cos(\widehat{AOB})$$
$$\Leftrightarrow \sqrt{6} = 2 \times \sqrt{3} \times \cos(\vec{u};\vec{v})$$
$$\Leftrightarrow \frac{\sqrt{6}}{2\times\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{2}\times\sqrt{3}}{2\times\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{2}}{2} = \cos(\widehat{AOB})$$
$$\Leftrightarrow \widehat{AOB} = \frac{\pi}{4}$$

2) Soit ABDC un parallélogramme tel que AB=4, AC=5 et $\widehat{BAC} = \frac{\pi}{3}$

a) Calculer $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC}$ b) Calculer $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{CD}$ c) Calculer $\overrightarrow{DB}.\overrightarrow{CD}$



a) $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC} = AB \times AC \times \cos(\widehat{BAC}) = 4 \times 5 \times \cos\left(\frac{\pi}{3}\right) = 4 \times 5 \times \frac{1}{2} = 10.$

b) ABDC est un parallélogramme donc $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD}$,

Ainsi $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{CD} = \overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{AB}^2 = AB^2 = 4^2 = 16.$

c) $\overrightarrow{DB}.\overrightarrow{CD} = \overrightarrow{CA}.\overrightarrow{CD}$ car $\overrightarrow{DB} = \overrightarrow{CA}$, ainsi $\overrightarrow{CA}.\overrightarrow{CD} = CA \times CD \times \cos(\widehat{ACD})$

Comme ABDC est un parallélogramme, $CD = AB$ et $\widehat{ACD} = \pi - \frac{\pi}{3} = \frac{2\pi}{3}$

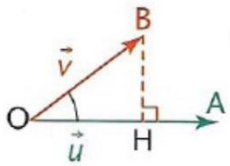
D'où $\overrightarrow{DB}.\overrightarrow{CD} = 5 \times 4 \times \cos\left(\frac{2\pi}{3}\right) = 5 \times 4 \times \left(-\frac{1}{2}\right) = -10$

c) Expression du produit scalaire à l'aide d'un projeté orthogonal :

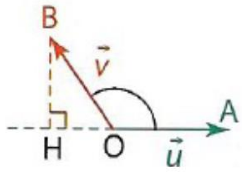
Définition :

Pour tous vecteurs non nuls $\vec{u} = \overrightarrow{OA}$ et $\vec{v} = \overrightarrow{OB}$, si H est le projeté orthogonal de B sur (OA), alors :

$\vec{u}.\vec{v} = \mathbf{OA} \times \mathbf{OH}$



$\vec{u}.\vec{v} = -\mathbf{OA} \times \mathbf{OH}$



❖ **Démonstration :**

Par définition $\overrightarrow{OA}.\overrightarrow{OB} = OA \times OB \times \cos(\widehat{AOB})$

- *Dans le cas où* $\overrightarrow{OA}$ *et* $\overrightarrow{OB}$ *sont de même sens , l'angle* $\widehat{AOB}$ *est inférieur à 90°*

  donc $\cos(\widehat{AOB}) = \cos(\widehat{HOB})$ *Or dans le triangle HOB, on a* $\cos(\widehat{HOB}) = \frac{OH}{OB}$

  Donc $\overrightarrow{OA}.\overrightarrow{OB} = OA \times OB \times \cos(\widehat{HOB}) = OA \times OB \times \frac{OH}{OB} = OA \times OH$

- *Dans le cas où* $\overrightarrow{OA}$ *et* $\overrightarrow{OB}$ *sont de sens contraire, l'angle* $\widehat{AOB}$ *est supérieur à 90° donc* $\widehat{AOB} = 180° - \widehat{BOH}$ *et donc*

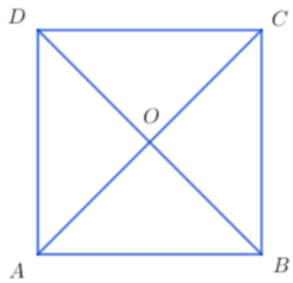
  $\cos(\widehat{AOB}) = \cos(180° - \widehat{BOH}) = -\cos(\widehat{BOH})$ *, or dans le triangle HOB, on a* $\cos(\widehat{HOB}) = \frac{OH}{OB}$

  Donc $\overrightarrow{OA}.\overrightarrow{OB} = OA \times OB \times (-\cos(\widehat{HOB})) = OA \times OB \times \left(-\frac{OH}{OB}\right) = -OA \times OH$

❖ **Exercices d'applications :**

On considère le carré $ABCD$ de centre O et de côté 6.
Calculer les produits scalaires suivants :

1) $\overrightarrow{AD}.\overrightarrow{AO}$ 2) $\overrightarrow{OB}.\overrightarrow{OD}$ 3) $\overrightarrow{BO}.\overrightarrow{BC}$ 4) $\overrightarrow{AO}.\overrightarrow{OC}$ 5) $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{OD}$



1) Soit O_1 le projeté orthogonal de O sur (AD).
$\overrightarrow{AD}.\overrightarrow{AO} = \overrightarrow{AD}.\overrightarrow{AO_1} = AD \times AO_1$ car $\overrightarrow{AD}$ *et* $\overrightarrow{AO_1}$ sont colinéaires et de même sens
$= 6 \times 3 = 18$

2) En appliquant le théorème de Pythagore au triangle rectangle BAD. On a
$BD^2 = 6^2 + 6^2 = 2 \times 6^2$ ainsi $BD = 6\sqrt{2}$ et $OB = OD = \frac{BD}{2} = 3\sqrt{2}$

$\overrightarrow{OB}.\overrightarrow{OD} = -OB \times OD$ car $\overrightarrow{OB}$ *et* $\overrightarrow{OD}$ sont colinéaires et de sens contraire
$= -3\sqrt{2} \times 3\sqrt{2} = -18$

3) $\overrightarrow{BO}.\overrightarrow{BC} = \overrightarrow{BO}.\overrightarrow{BO}$ car O est le projeté orthogonal de C sur (BD)
$= \overrightarrow{BO}^2 = BO^2 = (3\sqrt{2})^2 = 18.$

4) $\overrightarrow{AO}.\overrightarrow{OC} = \overrightarrow{AO}.\overrightarrow{AO}$ car $\overrightarrow{AO} = \overrightarrow{OC}$
$= \overrightarrow{AO}^2 = AO^2 = (3\sqrt{2})^2 = 18$ AO étant la longueur de la demi-diagonale du carré

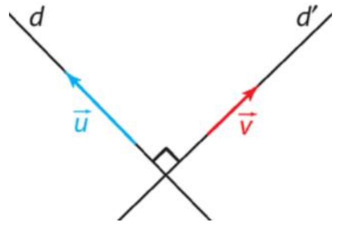
5) $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{OD} = \overrightarrow{AB}.\overrightarrow{BO}$ car $\overrightarrow{OD} = \overrightarrow{BO}$
$= \overrightarrow{AB}.\overrightarrow{BO_2}$ avec O_2 le projeté orthogonal de O sur (BA).
$= -AB \times BO_2$ car $\overrightarrow{AB}$ *et* $\overrightarrow{BO_2}$ sont colinéaires et de sens contraire
$= -6 \times 3 = -18$

d) Produit scalaire et orthogonalité :

Définition et propriété :

Deux vecteurs non nuls $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont dit **orthogonaux** si les droites qui les supportent sont **perpendiculaires**.

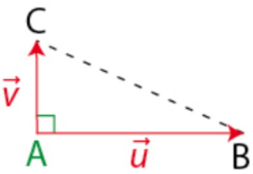
Le vecteur nul est orthogonal à tout vecteur.



Deux vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont orthogonaux si et seulement si leur produit scalaire est nul :

$$\vec{u} \perp \vec{v} \quad \Leftrightarrow \quad \vec{u}.\vec{v} = 0$$

❖ **Démonstration :**



$\vec{u} = \overrightarrow{AB}$ et $\vec{v} = \overrightarrow{AC}$ sont des vecteurs non nuls : $\vec{u}$ est orthogonal à $\vec{v}$ équivaut à A est le projeté orthogonal de C sur la droite (AB), donc $\vec{u}.\vec{v} = AB \times AA = 0$

II – Propriétés du produit scalaire :

Soit $\vec{u}$, $\vec{v}$ et $\vec{w}$ et k un nombre réel, on a pour tous vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$

✧ Propriété de symétrie:	✧ Opérations sur les produits scalaires :	
$\vec{u}.\vec{v} = \vec{v}.\vec{u}$	$\vec{u}.(\vec{v}+\vec{w}) = \vec{u}.\vec{v} + \vec{u}.\vec{w}$	$\vec{u}.(k\vec{v}) = k\vec{u}.\vec{v}.$
✧ Identités remarquables :		
$(\vec{u}+\vec{v})^2 = \vec{u}^2 + 2\vec{u}.\vec{v} + \vec{v}^2$	$(\vec{u}-\vec{v})^2 = \vec{u}^2 - 2\vec{u}.\vec{v} + \vec{v}^2$	$(\vec{u}+\vec{v})(\vec{u}-\vec{v}) = \vec{u}^2 - \vec{v}^2$

III – Autres expressions du produit scalaire:

a) Expression analytique du produit scalaire :

Propriété :

Dans une base orthonormé, si les vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ ont pour coordonnées respectives

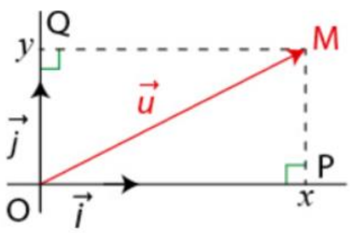
$\vec{u}\binom{x}{y}$ et $\vec{v}\binom{x'}{y'}$ on a alors $\vec{u}.\vec{v} = xx' + yy'$

❖ **Exemple :**

Soit $\vec{u}(5\,;\,-4)$ et $\vec{v}(-3\,;\,7)$ deux vecteurs. Calculer le produit scalaire $\vec{u}.\vec{v}$

$\vec{u}.\vec{v} = 5 \times (-3) + (-4) \times 7 = -15 - 28 = -43$

Dans un repère **orthonormé,** soit un vecteur $\vec{u}$ de coordonnées $(x\,;y)$



La **norme du vecteur** $\vec{u}$ notée $||\vec{u}||$, est la distance OM.

Elle est égale à $||\vec{u}|| = \sqrt{x^2+y^2}$ et on note $||\vec{u}||^2 = \vec{u}^2 = x^2 + y^2$

En effet, on a d'une part $\vec{u}^2 = \vec{u}.\vec{u} = x^2 + y^2$ et d'autre part $\vec{u}.\vec{u} = ||\vec{u}||^2$

Dans un plan muni d'un repère orthonormé, si les vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ ont pour coordonnées respectives

$\vec{u}\binom{x}{y}$ et $\vec{v}\binom{x'}{y'}$ on a alors $\vec{u} \perp \vec{v} \quad \Leftrightarrow \quad \vec{u}.\vec{v} = 0 \quad \Leftrightarrow \quad xx' + yy' = 0$

❖ **Exemples :**

Soit $\vec{u}(5\,;\,1)$. Calculer $\|\vec{u}\|$:

$\|\vec{u}\| = \sqrt{x^2+y^2} = \sqrt{5^2+1^2} = \sqrt{26}$

Dans une base orthonormée, on donne les vecteurs $\vec{u}(\sqrt{5}-2; -1)$ et $\vec{v}(\sqrt{5}+2; 1)$, déterminer si ces vecteurs sont orthogonaux.

$\vec{u}.\vec{v} = xx' + yy' = (\sqrt{5}-2)(\sqrt{5}+2) + (-1)\times 1 = 5 - 4 - 1 = 0$, donc $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont orthogonaux.

b) Développement de $\|\vec{u}+\vec{v}\|^2$ et $\|\vec{u}-\vec{v}\|^2$:

Soit $\vec{u}$, $\vec{v}$ deux vecteurs

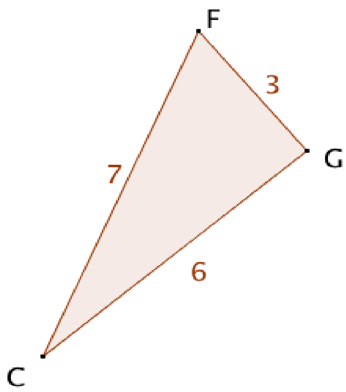
$\|\vec{u}+\vec{v}\|^2 = \|\vec{u}\|^2 + 2\vec{u}.\vec{v} + \|\vec{v}\|^2$	$\|\vec{u}-\vec{v}\|^2 = \|\vec{u}\|^2 - 2\vec{u}.\vec{v} + \|\vec{v}\|^2$

c) Expressions du produit scalaire à l'aide de normes :

$\vec{u}.\vec{v} = \frac{1}{2}\left(\|\vec{u}\|^2 + \|\vec{v}\|^2 - \|\vec{u}-\vec{v}\|^2\right)$	$\vec{u}.\vec{v} = \frac{1}{2}\left(\|\vec{u}+\vec{v}\|^2 - \|\vec{u}\|^2 - \|\vec{v}\|^2\right)$

❖ **Exercice application :**

ABC est un triangle tel que : $CG = 6$, $CF = 7$, $FG = 3$, Calculer $\overrightarrow{CG}.\overrightarrow{CF}$.



$$\overrightarrow{CG}.\overrightarrow{CF} = \frac{1}{2}\left(\left\|\overrightarrow{CG}\right\|^2 + \left\|\overrightarrow{CF}\right\|^2 - \left\|\overrightarrow{CG}-\overrightarrow{CF}\right\|^2\right)$$

$$= \frac{1}{2}\left(CG^2 + CF^2 - FG^2\right) \text{ car } \overrightarrow{CG}-\overrightarrow{CF} = \overrightarrow{CG}+\overrightarrow{FC} = \overrightarrow{FG}$$

$$= \frac{1}{2}\left(6^2 + 7^2 - 3^2\right) = 38$$