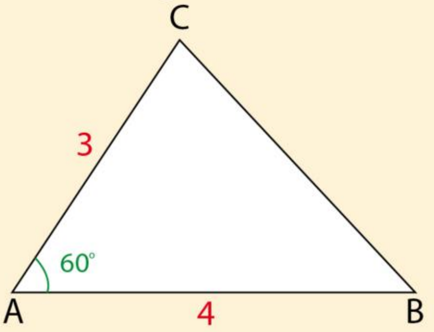
*****************PRODUIT SCALAIRE ET COSINUS ****************************

- **Exercice 13 – 14 – 15 -17 p 215**

13 ABC est le triangle ci-dessous.



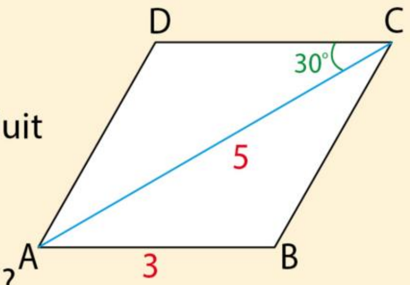
Calculer mentalement le produit scalaire $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC}$.

14 A, B, C sont trois points tels que :

$$||\overrightarrow{AB}|| = 5, \quad ||\overrightarrow{AC}|| = 3 \quad \text{et} \quad \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = -15.$$

Calculer mentalement la mesure, en radian, de $\widehat{BAC}$.

15 ABCD est ce parallélogramme.
Élida affirme : « Le produit scalaire $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC}$ est égal à 13. »
Que peut-on en penser ?



17 Pour chaque affirmation, dire si elle est vraie ou fausse. Expliquer.

a) Si ABC est un triangle équilatéral de côté 6, alors $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = 36$.

b) Si A, B et C sont des points alignés dans cet ordre avec $AB = 5$ et $AC = 6$, alors $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = 30$.

c) Si ABC est un triangle rectangle en A, alors $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = 0$.

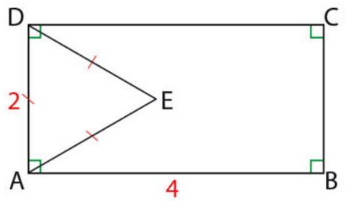
- **Exercice 19 p 218**

19 A, B et C sont trois points distincts.
Recopier et compléter ce tableau.

AB	AC	$\widehat{BAC}$ en rad (dans $]-\pi\,;\,\pi]$)	$\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}$
	8	$\frac{\pi}{4}$	12
5	8		-20
2	4		$4\sqrt{2}$
2		$-\frac{\pi}{3}$	7,5

- **Exercice 1 p 215 (corrigé) : Calculer un produit scalaire avec un cosinus:**

ABCD est un rectangle tel que $AB = 4$ et $AD = 2$.
AED est un triangle équilatéral situé à l'intérieur de ABCD.
a) Calculer le produit scalaire $\overrightarrow{AE}\cdot\overrightarrow{AD}$.
b) Calculer le produit scalaire $\overrightarrow{DC}\cdot\overrightarrow{AE}$.



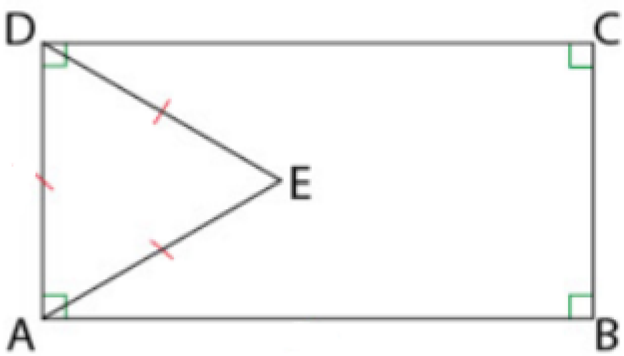
a) $\overrightarrow{AE}\cdot\overrightarrow{AD} = AE \times AD \times \cos(\widehat{DAE})$
Le triange AED est équilatéral donc $\widehat{DAE} = 60°$.
$\overrightarrow{AE}\cdot\overrightarrow{AD} = 2 \times 2 \times \cos(60°) = 4 \times \frac{1}{2} = 2$
b) ABCD est un rectangle donc $\overrightarrow{DC} = \overrightarrow{AB}$.
D'où $\overrightarrow{DC}\cdot\overrightarrow{AE} = \overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AE}$.
$\widehat{EAB} = 90° - \widehat{DAE} = 90° - 60° = 30°$
Donc $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AE} = AB \times AE \times \cos(\widehat{EAB}) = 4 \times 2 \times \cos(30°)$.
Par conséquent, $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AE} = 8 \times \frac{\sqrt{3}}{2} = 4\sqrt{3}$, soit $\overrightarrow{DC}\cdot\overrightarrow{AE} = 4\sqrt{3}$.

On utilise la formule du cosinus car les longueurs AE, AD et une mesure de l'angle $\widehat{DAE}$ sont connues.

Pour calculer $\overrightarrow{DC}\cdot\overrightarrow{AE}$, on remplace $\overrightarrow{DC}$ par un autre représentant, $\overrightarrow{AB}$.

- **Exercice 3 p 215**

3 Reprendre les données de l'exercice **1** avec $AB = 5$ et $AD = 4$.
Calculer chacun des produits scalaires :
a) $\overrightarrow{DE}\cdot\overrightarrow{DC}$ **b)** $\overrightarrow{CB}\cdot\overrightarrow{DE}$

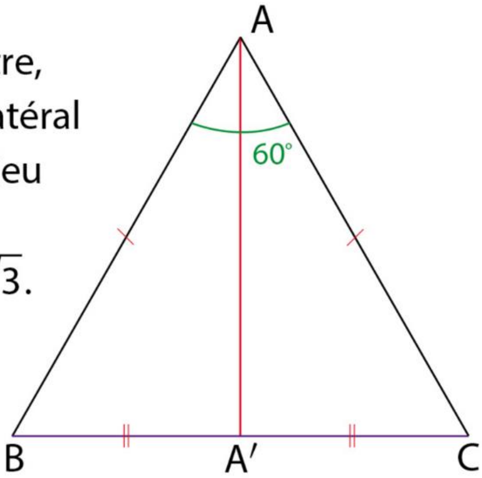


- **Exercice 22 p 218 :**

22 Sur la figure ci-contre, ABC est un triangle équilatéral de côté 4 et A' est le milieu du côté $[BC]$.

a) Justifier que $AA' = 2\sqrt{3}$.

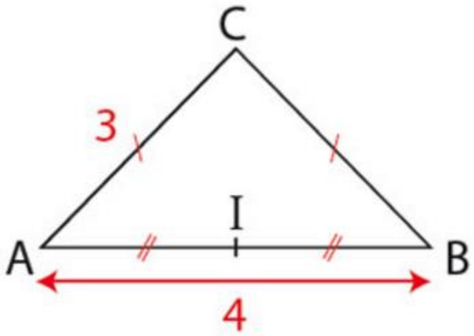
b) Calculer les produits scalaires $\overrightarrow{AA'} \cdot \overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AA'} \cdot \overrightarrow{BC}$.



*****************PRODUIT SCALAIRE ET PROJETE ORTHOGONAL ******************

- **Exercice 2 p 215 (corrigé) : Calculer un produit scalaire avec le projeté orthogonal :**

ABC est un triangle isocèle en C tel que $AB = 4$ et $AC = 3$.
I est le milieu du segment $[AB]$.
Calculer le produit scalaire $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC}$.



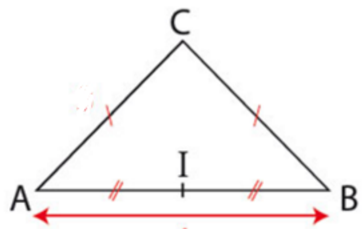
Solution

Le triangle ABC est isocèle en C et I est le milieu du segment $[AB]$, donc le projeté orthogonal du point C sur la droite (AB) est le point I.
Les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AI}$ sont colinéaires et de même sens, donc $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = AB \times AI = 4 \times 2 = 8$.

La présence d'un triangle isocèle permet d'utiliser un projeté orthogonal pour calculer ce produit scalaire. En effet, dans le triangle ABC isocèle en C, la médiane (CI) est aussi la hauteur issue de C.

4 Reprendre les données de l'exercice **2** avec $AB = 5$ et $AC = 6$.
Calculer chacun des produits scalaires :

a) $\overrightarrow{BC} \cdot \overrightarrow{BA}$ **b)** $\overrightarrow{CA} \cdot \overrightarrow{CI}$

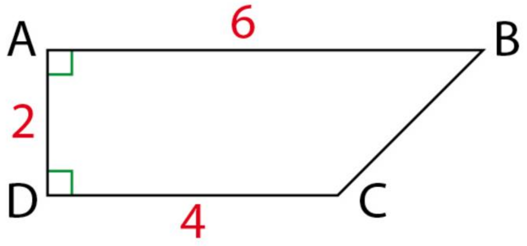


30 ABCD est le trapèze ci-dessous. Calculer :

a) $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{DC}$ **b)** $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC}$

c) $\overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{AD}$ **d)** $\overrightarrow{BC} \cdot \overrightarrow{AD}$

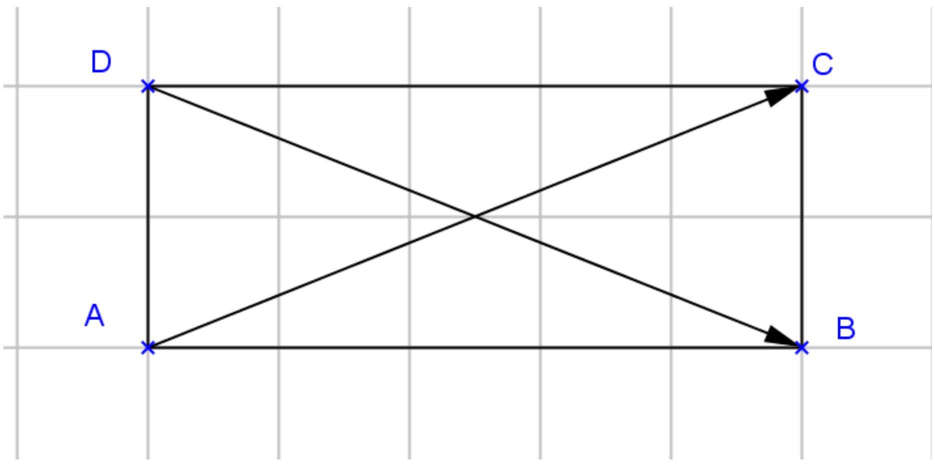
e) $\overrightarrow{AD} \cdot \overrightarrow{DC}$ **f)** $\overrightarrow{BA} \cdot \overrightarrow{DA}$



***************** REGLES DE CALCULS ******************

34 ABCD est un rectangle tel que $AB = 5$ et $AD = 2$.

En écrivant $\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC}$ et $\overrightarrow{DB} = \overrightarrow{DA} + \overrightarrow{AB}$, expliquer pourquoi $\overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{DB} = 21$.



******************* PRODUIT SCALAIRE ET EXPRESSION ANALYTIQUE ******************

39 Dans chaque cas, donner la bonne réponse.

a) On donne $\vec{u}(2\,;-4)$ et $\vec{v}(-1\,;3)$. Alors …

(1) $\vec{u}\cdot\vec{v}=2$ **(2)** $\vec{u}\cdot\vec{v}=-14$ **(3)** $\vec{u}\cdot\vec{v}=-10$

b) On donne $\vec{t}\left(-5\,;\sqrt{3}\right)$. Alors …

(1) $\vec{t}\cdot\vec{i}=\sqrt{3}$ **(2)** $\vec{t}\cdot\vec{j}=-5$ **(3)** $\vec{t}\cdot\vec{i}=-5$

c) On donne $\vec{w}(-1\,;5)$. Alors …

(1) $\|\vec{w}\|=\sqrt{26}$ **(2)** $\|\vec{w}\|=\sqrt{24}$ **(3)** $\|\vec{w}\|=6$

40 Dans un repère orthonormé, on donne les points $A(-3\,;-1)$, $B(-2\,;1)$ et $C(2\,;0)$.

Calculer :

a) $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}$ **b)** $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{CA}$ **c)** $\overrightarrow{AB}^2$ **d)** AB

41 ABC est un triangle rectangle isocèle en A tel que $AC = 5$. D, E et F sont les milieux respectifs des côtés $[AB]$, $[AC]$ et $[BC]$.

On introduit le repère orthonormé $\left(A\,;\, \frac{1}{5}\overrightarrow{AB},\, \frac{1}{5}\overrightarrow{AC}\right)$.

a) Réaliser une figure et déterminer les coordonnées des points A, D, E et F.

b) Calculer $\overrightarrow{AF} \cdot \overrightarrow{ED}$ et interpréter le résultat.

****************** PRODUIT SCALAIRE ET NORMES *****************

47 ABC est un triangle tel que :

$$AB = 3,\ BC = 5 \text{ et } AC = 6.$$

Calculer $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC}$.

48 $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont des vecteurs tels que :

$$||\vec{u}|| = 3,\ ||\vec{v}|| = 5 \quad \text{et} \quad ||\vec{v} + \vec{u}|| = 4.$$

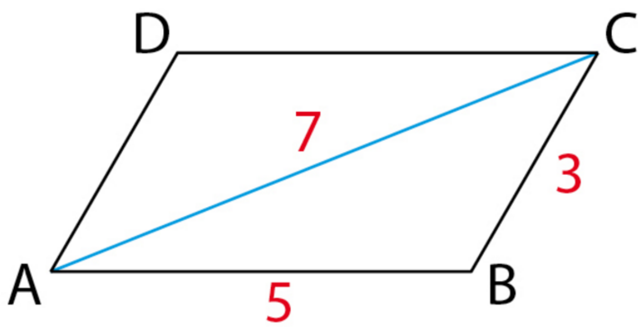
Calculer le produit scalaire $\vec{u} \cdot \vec{v}$.

49 ABCD est un parallélogramme tel que : $AB = 5$, $BC = 3$ et $AC = 7$.

Calculer :

a) $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC}$

b) $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AD}$



CORRECTION

13 $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = AB \times AC \times \cos(\widehat{BAC})$,

d'où $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = 4 \times 3 \times \cos(60°) = 12 \times \frac{1}{2} = 6$.

14 $\cos(\widehat{BAC}) = \dfrac{\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC}}{AB \times AC}$

d'où $\cos(\widehat{BAC}) = \dfrac{-15}{15} = -1$

soit $\widehat{BAC} = \pi$ rad.

15 ABCD est un parallélogramme donc

$\widehat{BAC} = \widehat{DCA} = 30°$ (angles alternes-internes)

$\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = 3 \times 5 \times \cos(30°) = \dfrac{15\sqrt{3}}{2} = \dfrac{15}{2}\sqrt{3}$.

L'affirmation d'Elida n'est donc pas correcte.

17 **a)** L'affirmation est fausse. En effet,

$\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = AB \times AC \times \cos(\widehat{BAC})$

$\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = 6 \times 6 \times \cos(60°) = 36 \times \frac{1}{2} = 18$

b) L'affirmation est vraie. En effet,

$\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = AB \times AC \times \cos(\widehat{BAC})$.

$\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = 5 \times 6 \times \cos(0°)$ d'où $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = 30$.

c) L'affirmation est vraie. En effet, $\widehat{BAC} = 90°$

donc $\cos(\widehat{BAC}) = 0$, d'où $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = 0$.

19

AB	AC	$\widehat{BAC}$ en rad dans $]-\pi ; \pi]$	$\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC}$
$\frac{3\sqrt{2}}{2}$	8	$\frac{\pi}{4}$	12
5	8	$\frac{2\pi}{3}$	-20
2	4	$\frac{\pi}{4}$	$4\sqrt{2}$
2	7,5	$-\frac{\pi}{3}$	7,5

3 **a)** $\overrightarrow{DE} \cdot \overrightarrow{DC} = DE \times DC \times \cos(\widehat{CDE})$.

Le triangle AED est équilatéral donc $\widehat{ADE} = 60°$,

d'où $\widehat{CDE} = 90° - 60° = 30°$.

$$\overrightarrow{DE} \cdot \overrightarrow{DC} = 4 \times 5 \times \cos(30°) = 20 \times \frac{\sqrt{3}}{2} = 10\sqrt{3}$$

b) ABCD est un rectangle donc $\overrightarrow{CB} = \overrightarrow{DA}$.

D'où $\overrightarrow{CB} \cdot \overrightarrow{DE} = \overrightarrow{DA} \cdot \overrightarrow{DE} = DA \times DE \times \cos(\widehat{ADE})$

$$\overrightarrow{CB} \cdot \overrightarrow{DE} = 4 \times 4 \times \cos(60°) = 8$$

22 **a)** Le triangle ABC est équilatéral donc la médiane (AA') est aussi la hauteur relative à $[BC]$.
Donc le triangle $AA'B$ est rectangle en A'.
D'après le théorème de Pythagore, il vient :
$AA'^2 = AB^2 - BA'^2$, soit $AA'^2 = 16 - 4 = 12$.
Donc, $AA' = \sqrt{12} = 2\sqrt{3}$.
b) Le triangle ABC est équilatéral donc la médiane (AA') est aussi la bissectrice intérieure de $\widehat{BAC}$.
Donc $\widehat{BAA'} = 30°$.
$\overrightarrow{AA'} \cdot \overrightarrow{AB} = AA' \times AB \times \cos(BAA')$
$\overrightarrow{AA'} \cdot \overrightarrow{AB} = 2\sqrt{3} \times 4 \times \cos(30°) = 8\sqrt{3} \times \dfrac{\sqrt{3}}{2} = 12$
(AA') est perpendiculaire à $[BC]$ donc $\overrightarrow{AA'} \cdot \overrightarrow{BC} = 0$.

4 **a)** Le triangle ABC est isocèle en C, donc le projeté orthogonal du point C sur la droite (AB) est I.
D'où $\overrightarrow{BC} \cdot \overrightarrow{BA} = \overrightarrow{BI} \cdot \overrightarrow{BA}$
Les vecteurs $\overrightarrow{BA}$ et $\overrightarrow{BI}$ sont colinéaires et de même sens, d'où : $\overrightarrow{BC} \cdot \overrightarrow{BA} = BI \times BA = 2{,}5 \times 5 = 12{,}5$.

b) Le projeté orthogonal du point A sur (CI) est I donc $\overrightarrow{CA} \cdot \overrightarrow{CI} = \overrightarrow{CI}^2 = CI^2$.
D'après le théorème de Pythagore, $CI^2 = CA^2 - AI^2$, donc $CI^2 = 36 - 6{,}25 = 29{,}75$.
D'où $\overrightarrow{CA} \cdot \overrightarrow{CI} = 29{,}75$.

30 **a)** Par projection orthogonale des points C et D sur (AB) : $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{DC} = AB \times DC = 24$.

Remarque : on peut aussi utiliser le fait que $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{DC}$ sont colinéaires et de même sens.
b) Par projection orthogonale du point C sur (AB) :
$\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = AB \times DC = 24$.
c) Par projection orthogonale du point C sur (AD) :
$\overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{AD} = AD^2 = 4$.
d) Par projection orthogonale des points B et C sur (AD) : $\overrightarrow{BC} \cdot \overrightarrow{AD} = AD^2 = 4$.
e) $\overrightarrow{AD}$ et $\overrightarrow{DC}$ orthogonaux donc $\overrightarrow{AD} \cdot \overrightarrow{DC} = 0$.
f) $\overrightarrow{BA}$ et $\overrightarrow{DA}$ orthogonaux donc $\overrightarrow{BA} \cdot \overrightarrow{DA} = 0$.

34 $\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{DB}=(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC})\cdot(\overrightarrow{DA}+\overrightarrow{AB})$

$\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{DB}=\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{DA}+\overrightarrow{AB}^2+\overrightarrow{BC}\cdot\overrightarrow{DA}+\overrightarrow{BC}\cdot\overrightarrow{AB}$

Or, ABCD est un rectangle donc $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{DA}$ sont orthogonaux, ainsi que $\overrightarrow{BC}$ et $\overrightarrow{AB}$,

donc $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{DA}=\overrightarrow{BC}\cdot\overrightarrow{AB}=0$.

D'où $\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{DB}=AB^2+\overrightarrow{BC}\cdot\overrightarrow{DA}$

Or, $\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{AD}$, donc $\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{DB}=AB^2-AD^2$.

Finalement, $\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{DB}=25-4=21$.

39 **a)** $\vec{u}\cdot\vec{v}=-2-12=-14$. Réponse **(2)**.

b) $\vec{t}\left(-5\,;\sqrt{3}\right)$ et $\vec{i}\,(1\,;0)$

donc $\vec{t}\cdot\vec{i}=-5+0=-5$. Réponse **(2)**.

c) $\vec{w}=\sqrt{(-1)^2+5^2}=\sqrt{26}$. Réponse **(1)**.

40 $\overrightarrow{AB}(1\,;2)$ et $\overrightarrow{AC}(5\,;1)$.

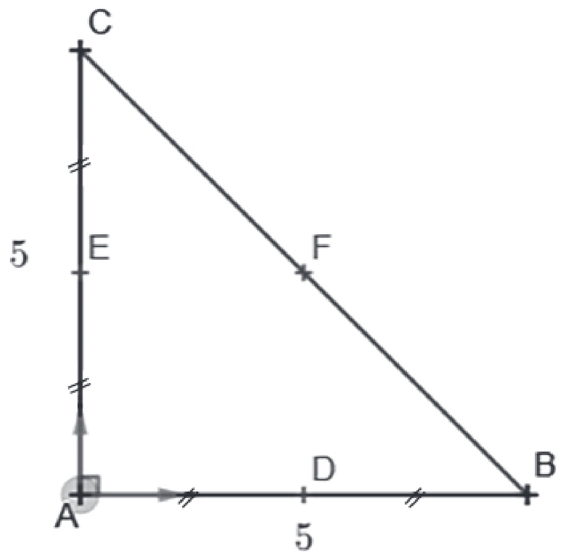
a) $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}=5+2=7$

b) $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{CA}=-\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}=-7$

c) $\overrightarrow{AB}^2=1^2+2^2=5$

d) $AB=\sqrt{5}$

41 **a)**



$A(0\,;0)$, $D(2{,}5\,;0)$, $E(0\,;2{,}5)$.

$B(5\,;0)$ et $C(0\,;5)$ donc les coordonnées du milieu F de $[BC]$ sont : $F(2{,}5\,;2{,}5)$.

b) On déduit de **a)**, $\overrightarrow{AF}(2{,}5\,;2{,}5)$ et $\overrightarrow{ED}(2{,}5\,;-2{,}5)$.

Par conséquent, $\overrightarrow{AF}\cdot\overrightarrow{ED}=2{,}5^2-2{,}5^2=0$.

D'où $\overrightarrow{AF}$ et $\overrightarrow{ED}$ sont orthogonaux.

47 $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}=\frac{1}{2}(AB^2+AC^2-CB^2)$

$\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}=\frac{1}{2}(9+36-25)=10$

48 $\vec{u}\cdot\vec{v}=\frac{1}{2}(\|\vec{u}+\vec{v}\|^2-\vec{u}^2-\vec{v}^2)$

$\vec{u}\cdot\vec{v}=\frac{1}{2}(16-9-25)=-9$

49 **a)** $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}=\frac{1}{2}(AB^2+AC^2-CB^2)$

$\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}=\frac{1}{2}(25+49-9)=32{,}5$

b) $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AD}=\frac{1}{2}\left(\|\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AD}\|^2-\overrightarrow{AB}^2-\overrightarrow{AD}^2\right)$.

ABCD est un parallélogramme d'où $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AD}=\overrightarrow{AC}$.

$\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AD}=\frac{1}{2}(AC^2-AB^2-AD^2)$

$\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AD}=\frac{1}{2}(49-25-9)=7{,}5$