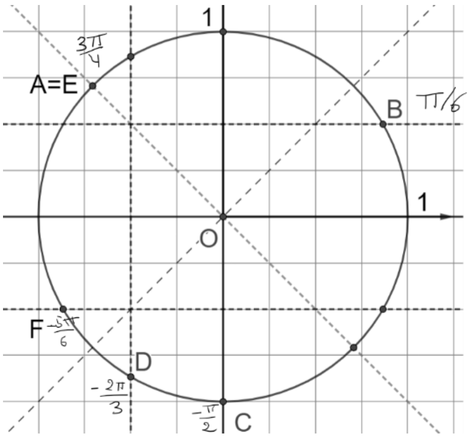
Mathématiques 1ère EDS	Devoir en Temps Libre n°11	Correction

Exercice 1 :

Placer sur le cercle trigonométrique ci-dessous, les points images A, B, C et D des réels $\frac{3\pi}{4}$; $\frac{\pi}{6}$; $-\frac{\pi}{2}$; $-\frac{2\pi}{3}$ puis les points E et F images respectives des réels $\frac{51\pi}{4}$ et $\frac{-41}{6}\pi$ après avoir précisé leur mesure principale.



$\frac{51\pi}{4} = \frac{48\pi}{4} + \frac{3\pi}{4} = \frac{3\pi}{4} + 6 \times 2\pi$ avec $6 \in \mathbb{Z}$ $\frac{3\pi}{4} \in]-\pi; \pi]$

$\frac{-41\pi}{6} = -\frac{36\pi}{6} - \frac{5\pi}{6} = -\frac{5\pi}{6} - 3 \times 2\pi$ avec $-3 \in \mathbb{Z}$ $-\frac{5\pi}{6} \in]-\pi; \pi]$

2) Compléter le tableau ci-dessous :

α	$\frac{3\pi}{4}$	$\frac{\pi}{6}$	$-\frac{\pi}{2}$	$-\frac{2\pi}{3}$
$cos\alpha$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	0	$-\frac{1}{2}$
$sin\alpha$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	-1	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$

Exercice 2 :

1) Associer à chacun des points notés sur ce cercle trigonométrique, le nombre réel qui convient. Et qui appartient à $]-\pi;\pi]$.

Point	F	G	H	I	J	P
Nombre	0	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{5\pi}{6}$	$-\frac{5\pi}{6}$	$-\frac{\pi}{2}$	$-\frac{\pi}{4}$

2) Ecrire les **nombres** réels suivants sous la forme $x + 2k\pi$ avec $k \in \mathbb{Z}$ et $x \in]-\pi;\pi]$ des nombres suivants, $\frac{29\pi}{3}$; $\frac{-11\pi}{4}$; $\frac{56\pi}{9}$.

- $\frac{29\pi}{3} = \frac{30\pi}{3} - \frac{\pi}{3} = 10\pi - \frac{\pi}{3} = -\frac{\pi}{3} + 5 \times 2\pi$ avec $5 \in \mathbb{Z}$ $-\frac{\pi}{3} \in]-\pi; \pi]$
- $\frac{-11\pi}{4} = -\frac{8\pi}{4} - \frac{3\pi}{4} = -2\pi - \frac{\pi}{4} = -\frac{\pi}{4} - 2\pi$ avec $-1 \in \mathbb{Z}$ $-\frac{\pi}{4} \in]-\pi; \pi]$
- $\frac{56\pi}{9} = \frac{54\pi}{9} + \frac{2\pi}{9} = 6\pi + \frac{2\pi}{9} = \frac{2\pi}{9} + 3 \times 2\pi$ avec $3 \in \mathbb{Z}$ $\frac{\pi}{3} \in]-\pi; \pi]$

3) La valeur exacte de $sin\left(\frac{\pi}{12}\right) = \frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}$.

a) Calculer la valeur exacte de $cos\left(\frac{\pi}{12}\right)$.

Pour tout réel x, $on\ a\ cos^2x + sin^2x = 1$

D'où : $\cos^2\left(\frac{\pi}{12}\right) = 1 - \sin^2\left(\frac{\pi}{12}\right) = 1 - \left(\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}\right)^2 = 1 - \frac{6-2\sqrt{6}\times\sqrt{2}+2}{16} = 1 - \frac{8-2\sqrt{12}}{16} = 1 - \frac{8-4\sqrt{3}}{16}$

$= 1 - \frac{2-\sqrt{3}}{4} = \frac{2+\sqrt{3}}{4}$

$\cos^2\left(\frac{\pi}{12}\right) = \frac{2+\sqrt{3}}{4} \quad \Leftrightarrow \cos\left(\frac{\pi}{12}\right) = \sqrt{\frac{2+\sqrt{3}}{4}} = \frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}$ ou $\cos\left(\frac{\pi}{12}\right) = -\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}$

Comme $\frac{\pi}{12} \in [\,0; \frac{\pi}{2}\,]$ on en déduit que $\cos\left(\frac{\pi}{12}\right) \geqslant 0$ donc on a : $\boxed{\cos\left(\frac{\pi}{12}\right) = \frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}}$

b) En déduire les valeurs exactes du sinus et du cosinus de $\frac{5\pi}{12}$; $\frac{7\pi}{12}$ et $\frac{11\pi}{12}$. (vous pouvez vous aider les relations des angles associées).

- $\frac{5\pi}{12} = \frac{6\pi}{12} - \frac{\pi}{12} = \frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{12}$ or $\cos(\frac{\pi}{2} - a) = \sin(a)$ donc $\cos(\frac{5\pi}{12}) = \cos(\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{12}) = \sin(\frac{\pi}{12}) = \frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}$

De même $\sin(\frac{\pi}{2} - a) = cos\,(a)$ donc $\sin(\frac{5\pi}{12}) = \sin(\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{12}) = cos\,(\frac{\pi}{12}) = \frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}$

- $\frac{7\pi}{12} = \frac{6\pi}{12} + \frac{\pi}{12} = \frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{12}$ or $\cos(\frac{\pi}{2} + a) = -\sin(a)$ donc $\cos(\frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{12}) = -\sin\left(\frac{\pi}{12}\right) = -\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}$

De même $\sin(\frac{\pi}{2} + a) = cos\,(a)$ donc $\sin(\frac{7\pi}{12}) = \sin(\frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{12}) = cos\,(\frac{\pi}{12}) = \frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}$

- $\frac{11\pi}{12} = \frac{12\pi}{12} - \frac{\pi}{12} = \pi - \frac{\pi}{12}$ or $\cos(\pi - a) = -cos\,(a)$ donc $\cos(\pi - \frac{\pi}{12}) = -\cos\left(\frac{\pi}{12}\right) = -\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}$

De même $\sin(\pi - a) = sin\,(a)$ donc $\sin(\frac{11\pi}{12}) = \sin(\pi - \frac{\pi}{12}) = sin\,(\frac{\pi}{12}) = \frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}$

<u>Exercice 3 :</u>

1) Résoudre l'équation trigonométrique $cosx = \frac{-1}{2}$ dans $[0; 2\pi[$

$cosx = \frac{-1}{2} \Leftrightarrow x = \frac{2\pi}{3}\ ou\ x = \frac{4\pi}{3}$

Sur $[0; 2\pi[$ l'équation $cosx = \frac{-1}{2}$ admet donc deux solutions $\frac{2\pi}{3}; \frac{4\pi}{3}$

2) Résoudre l'équation trigonométrique $2sinx - \sqrt{3} = 0$ dans $]-\pi; \pi]$

$2sinx - \sqrt{3} = 0 \Leftrightarrow sinx = \frac{\sqrt{3}}{2} \quad \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{3}\ ou\ x = \frac{2\pi}{3}$

Sur $]-\pi; \pi]$ l'équation $2sinx - \sqrt{3} = 0$ admet donc deux solutions $\frac{\pi}{3}; \frac{2\pi}{3}$

3) Résoudre graphiquement l'inéquation trigonométrique $cosx < \frac{-\sqrt{3}}{2}$ dans $[0; 2\pi[$

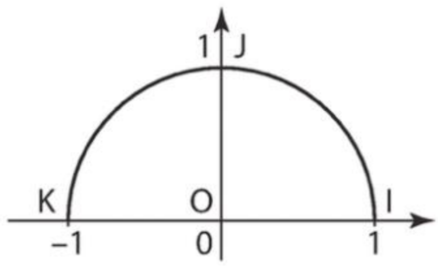
Sur $[0; 2\pi[$ l'inéquation $cosx < \frac{-\sqrt{3}}{2}$ admet donc pour ensemble solutions $S = \left]\frac{5\pi}{6}; \frac{7\pi}{6}\right[$.

4) Résoudre graphiquement l'inéquation trigonométrique $sinx > \frac{-\sqrt{2}}{2}$ dans $[0; 2\pi[$

Sur $[0; 2\pi[$ l'inéquation $sinx > \frac{-\sqrt{2}}{2}$ admet donc pour ensemble solutions $S = \left[0; \frac{5\pi}{4}\right[\cup \left]\frac{7\pi}{4}; 2\pi\right[$.

Exercice 4 :

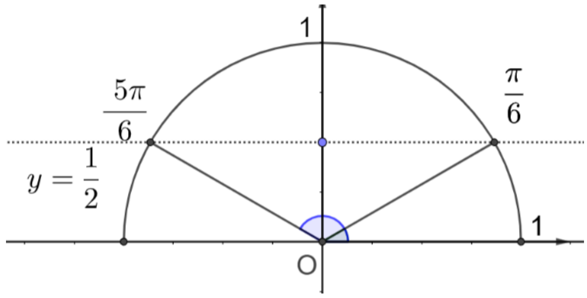
Un club de tennis possède un gymnase de forme demi-cylindrique, dont un schéma en coupe est
représenté ci-dessous. L'unité graphique est égale à 10 m.



On souhaite installer des gradins hauts de 5 m de chaque côté du court central situé à l'intérieur de ce gymnase.

1) a) Résoudre dans $[0; \pi]$ l'équation $\sin(x) = \frac{1}{2}$.

$sinx = \frac{1}{2} \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{6}$ ou $x = \frac{5\pi}{6}$



Sur $[0; \pi]$ l'équation $sinx = \frac{1}{2}$ admet donc deux solutions $\frac{\pi}{6}$ et $\frac{5\pi}{6}$.

b) En déduire les positions limites au sol des gradins.

On a vu précédemment que les gradins seront positionnés à une hauteur de $5\ m$, cela correspond à des angles de $\frac{\pi}{6}$ et $\frac{5\pi}{6}$.

Or $\cos\left(\frac{\pi}{6}\right) = \frac{\sqrt{3}}{2}$ et $\cos\left(\frac{5\pi}{6}\right) = -\frac{\sqrt{3}}{2}$, l'unité graphique est égale à 10 m, on a donc $10 \times \frac{\sqrt{3}}{2} \approx 8{,}66\ m$

Les gradins seront donc positionnés à environ 8,66m de O.

c) On décide d'installer une guirlande lumineuse le long du plafond, d'un gradin à l'autre.

Quelle longueur de guirlande va-t-on utiliser ?

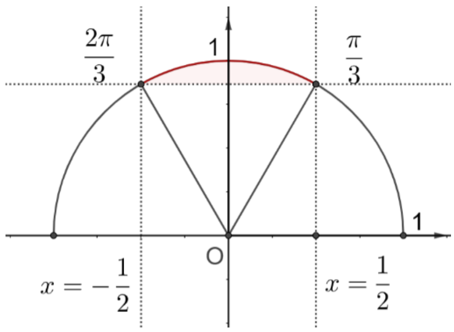
Entre les deux gradins, il y a une longueur de :

$\frac{5\pi}{6} - \frac{\pi}{6} = \frac{4\pi}{6} = \frac{2\pi}{3}$, ce qui correspond à une longueur de $10 \times \frac{2\pi}{3} \approx 20{,}94\ m$

2) On décide finalement d'installer une guirlande lumineuse horizontale longue de 10 m au plafond, de manière symétrique par rapport au sommet du gymnase.

a) Résoudre dans $[0; \pi]$ l'inéquation $-\frac{1}{2} \leq \cos(x) \leq \frac{1}{2}$.

On trace la droite d'équation $x = \frac{1}{2}$ et $x = \frac{1}{2}$ on relève les points du cercle situés entre ces deux droites .



Sur $[0; 2\pi[$ l'inéquation $-\frac{1}{2} \leq \cos(x) \leq \frac{1}{2}$ admet donc pour ensemble solutions

$S = [\frac{\pi}{3}; \frac{2\pi}{3}]$.

b) On admet que la personne qui fixe la guirlande mesure 1,80 m et que ses bras ne dépasseront pas le haut de sa tête au moment de l'installation.

En déduire la hauteur minimale de l'échafaudage pour pouvoir exécuter cette manœuvre.

La hauteur de la guirlande est de $10 \sin\left(\frac{\pi}{3}\right) = 10 \times \frac{\sqrt{3}}{2} = 5\sqrt{3} \approx 8{,}66\ m$

$8{,}66 - 1{,}8 = 6{,}86\ m$