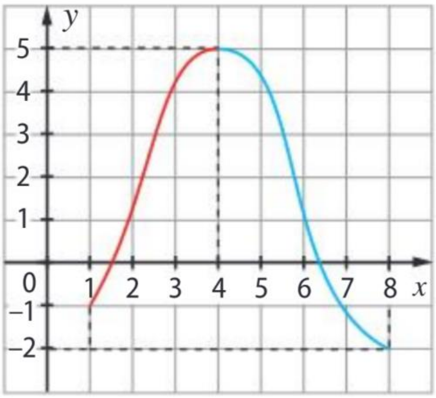
Mathématiques 2nd	**Chapitre 10 :** Variations et extremums	Fonctions

Dans ce cours, f est une fonction définie sur un ensemble D et I est un intervalle de D.

I – Sens de variation d'une fonction :

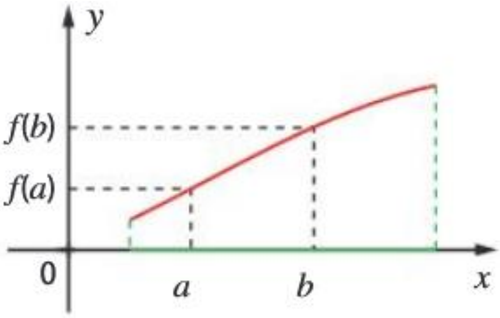
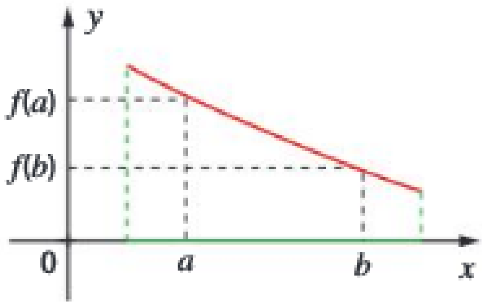
a) Exemple :



La courbe C_f ci-contre représente une fonction f définie sur un intervalle [1;8]. On remarque que :

- Dans l'intervalle [1 ;4], si les valeurs de la variable x augmentent, alors les images $f(x)$ augmentent.
- Dans l'intervalle [4 ;8], si les valeurs de la variable x augmentent, alors les images $f(x)$ diminuent.

b) Définitions :

❖ **Fonction croissante**	❖ **Fonction décroissante**
	
La fonction f **est croissante sur l'intervalle I** signifie que : **Quels que soient les réels a et b de I :** **si a ≤ b alors *f*(a) ≤ *f*(b)**	La fonction f **est décroissante sur l'intervalle I** signifie que : **Quels que soient les réels *a* et *b* de I :** **si *a* ≤b alors *f*(*a*) ≥ *f*(*b*)**
Les nombres *f(a)* et *f(b)* sont rangés dans le même ordre que *a* et *b* : on dit que ***f conserve l'ordre***	Les nombres et leurs images sont rangés en sens contraires que a et b , on dit ***f*** **change l'ordre** .

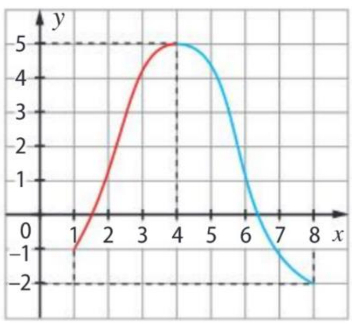
c) Tableau de variation :

Un tableau de variation regroupe les informations concernant les variations d'une fonction sur son ensemble de définition.

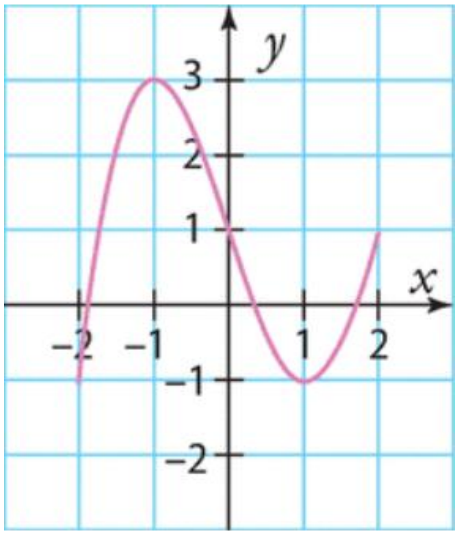
- La première ligne du tableau contient les bornes de l'ensemble de définition de f et des intervalles sur lesquels f est croissante, constante ou décroissante
- La deuxième ligne contient les flèches qui symbolisent le sens de variation de f, et les images par f des valeurs mises dans la première ligne.

❖ Exemple : Tableau de variation de la fonction f .

x	1		4		8
$f(x)$	-1	↗	5	↘	-2



d) Exercice d'application : Dresser un tableau et comparer des images :



f est une fonction définie sur [-2 ;2], dont voici la courbe représentative tracée dans un repère.

1. Décrire par des phrases les variations de la fonction f.La fonction f est croissante sur [-2 ;-1], puis décroissante sur [-1 ;1] et enfin croissante sur [1 ;2].

2. Dresser le tableau de variations de f.

x	-2		-1		1		2
f	-1	↗	3	↘	-1	↗	1

3. Comparer $f(-1{,}8)$ et $f(-1{,}5)$, puis comparer $f(-0{,}5)$ et $f(0{,}5)$.

$-1{,}8$ et $-1{,}5$ appartiennent à l'intervalle $[-2\,;\ -1]$ et f est croissante sur cet intervalle.

$-1{,}8 < -1{,}5$ donc $f(-1{,}8) < f(-1{,}5)$

$-0{,}5$ et $0{,}5$ appartiennent à l'intervalle $[-1\,;1]$ et f est décroissante sur cet intervalle.

$-0{,}5 < 0{,}5$ donc $f(-0{,}5) > f(0{,}5)$

Remarque : Lorsque f est croissante ou décroissante sur un intervalle, on dit qu'elle est monotone sur cet intervalle.

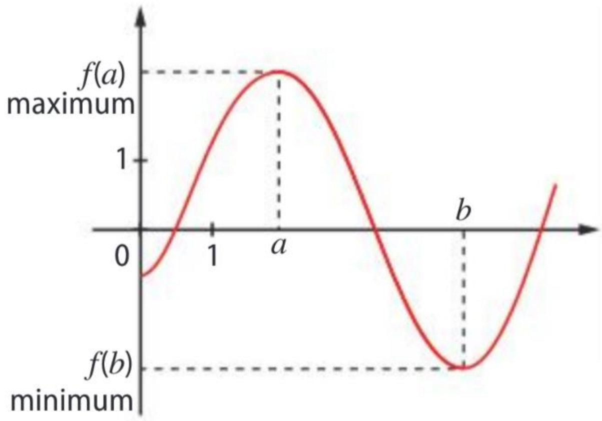
II – Extremums:

a) Définition :

Soient a et b deux réels de l'intervalle I.

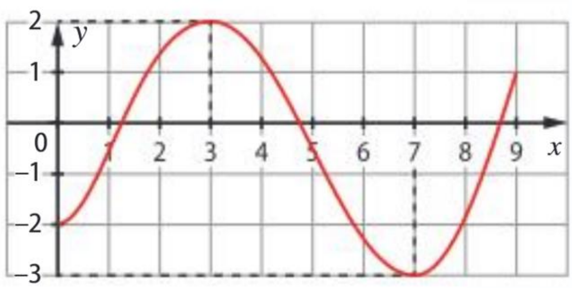
f admet un maximum en a sur I signifie que pour tour réel x de I , $\boldsymbol{f(x)} \leq \boldsymbol{f(a)}$
$f(a)$ est le maximum de f sur I.

f admet un minimum en b sur I signifie que pour tour réel x de I , $\boldsymbol{f(x)} \geq \boldsymbol{f(a)}$
$f(b)$ est le minimum de f sur I.



b) Exercice d'application 1 : Lire un maximum et un minimum:

f est la fonction définie sur l'intervalle $[0\,;9]$ par la courbe ci-contre. Déterminer le maximum et le minimum de f sur l'intervalle $[0\,;9]$ et les valeurs de x pour lesquelles ils sont atteints.



Sur l'intervalle $[0\,;9]$:
le maximum de f est égal à 2. Il est atteint pour $x = 3$.
Le minimum de f est égal à -3. Il est atteint pour $x = 7$.

c) Exercice d'application 2 : Déterminer les extrémums d'une fonction à partir d'un tableau :

Voici le tableau de variation d'une fonction g définie sur l'intervalle $[-10\ ;\ 8]$

x	-10		-2		1		5		8
g	-15	↗	5	↘	0	↗	10	↘	7

Déterminer le maximum et le minimum de g sur l'intervalle :

a) $[-10\ ;\ 8]$

Sur l'intervalle $[-10\ ; 8]$:

le maximum de g est égal à 10. Il est atteint pour $x = 5$.

Le minimum de g est égal à -15. Il est atteint pour $x = -10$.

b) $[-10\ ;\ 1]$

Sur l'intervalle $[-10\ ; 1]$:

le maximum de g est égal à 5. Il est atteint pour $x = -2$.

Le minimum de g est égal à -15. Il est atteint pour $x = -10$.

b) $[1\ ;\ 8]$

Sur l'intervalle $[1\ ; 8]$:

le maximum de g est égal à 10. Il est atteint pour $x = 5$.

Le minimum de g est égal à 0. Il est atteint pour $x = 1$.