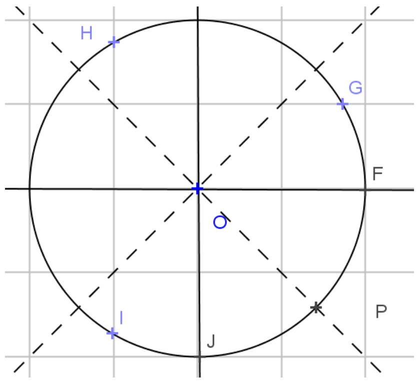
Mathématiques 1ère EDS	Devoir en Temps Libre n°12	Correction

Exercice 1 : Déterminer la fonction dérivée des fonctions suivantes :

$f_1(x) = 3x^2 - 8x + 1$ La fonction polynôme f_1 **est dérivable sur** $\mathbb{R}$ et, On a donc pour tout $x \in \mathbb{R}$: $f'_1(x) = 3 \times 2x - 8 \times 1 + 0 = 6x - 8$	$f_2(x) = x^2 + \frac{3}{x}$ f_2 est la somme de la fonction $x \longmapsto x^2$ qui est dérivable sur $\mathbb{R}$ et de la fonction $x \longmapsto \frac{3}{x}$ qui est dérivable sur]-∞ ;0[∪]0; +∞[, **donc f_3 est dérivable sur]-∞ ;0[∪]0; +∞[** On a donc pour tout $x \neq 0$: $f'_2(x) = 2x + 3 \times \left(-\frac{1}{x^2}\right) = 2x - \frac{3}{x^2} = \frac{2x^3-3}{x^2}$
$f_3(x) = 5\sqrt{x} + 4$ f_3 est la somme de la fonction $x \longmapsto 5\sqrt{x}$ qui est dérivable sur $]0; +\infty[$ et de la fonction $x \longmapsto 4$ qui est dérivable sur $\mathbb{R}$, **f_3 est donc dérivable sur $]0; +\infty[$** On a donc pour tout $x \in\ ]0; +\infty[$: $f'_3(x) = 5 \times \frac{1}{2\sqrt{x}} = \frac{5}{2\sqrt{x}}$	$f_4(x) = x^3 + \sqrt{5}$ f_4 est la somme de la fonction $x \longmapsto x^3$ et de la fonction $x \longmapsto \sqrt{5}$ qui sont toutes les deux dérivables sur $\mathbb{R}$ donc **f_4 est dérivable sur $\mathbb{R}$** On a donc pour tout $x \in \mathbb{R}$: $f'_4(x) = 3x^2 + 0 = 3x^2$
$f_5(x) = 5x\sqrt{x}$ f_3 est le produit de la fonction $x \longmapsto 5x$ dérivable sur $\mathbb{R}$ et de la fonction $x \longmapsto \sqrt{x}$ qui est dérivable sur $]0; +\infty[$, **f_5 est donc dérivable sur $]0; +\infty[$** f_5 est de la forme uv avec, $\begin{cases} u(x) = 5x \quad et \quad u'(x) = 5 \\ v(x) = \sqrt{x} \quad et \ \ v'(x) = \dfrac{1}{2\sqrt{x}} \end{cases}$ et, pour tout nombre réel $x > 0$, on a : $f_5'(x) = u'v + uv' = 5\sqrt{x} + 5x\dfrac{1}{2\sqrt{x}}$ $= \dfrac{5x \times \sqrt{x}}{2\sqrt{x} \times \sqrt{x}} + 5\sqrt{x} = 2{,}5\sqrt{x} + 5\sqrt{x} = 7{,}5\sqrt{x}$	$f_6(x) = \dfrac{3x - 2}{7x + 4}$ f_6 est le quotient de deux fonctions dérivable sur $\mathbb{R}$, et comme v s'annule en $-\frac{4}{7}$, donc **f_6 est dérivable sur]-∞ ; $-\frac{4}{7}$[∪] $-\frac{4}{7}$; +∞[** f_6 est de la forme $\frac{u}{v}$ avec, $\begin{cases} u(x) = 3x - 2 \ et \ u'(x) = 3 \\ v(x) = 7x + 4 \ \ et \ v'(x) = 7 \end{cases}$ et, pour tout nombre réel $x \neq -\frac{4}{7}$, on a $f'_6(x) = \frac{u'v-uv'}{v^2}$ $f'_6(x) = \frac{3(7x+4)-7(3x-2)}{(7x+4)^2} = \frac{21x+12-21x+14}{(7x+4)^2} = \frac{26}{(7x+4)^2}$
$f_7(x) = (5x - 3)^2$ La fonction f_7 est une fonction polynôme elle est donc **dérivable sur $\mathbb{R}$.** f_7 est de la forme u² avec $u(x) = 5x - 3$ et $u'(x) = 5$. On a donc pour tout $x \in \mathbb{R}$: $f'_7(x) = 2u'u = 2 \times 5(5x - 3) = 10(5x - 3)$	$f_8(x) = \sqrt{2x - 3}$ La fonction f_8 est la fonction composée d'une fonction affine par une fonction racine carrée. La racine carrée est définie lorsque $2x - 3 \ \geq 0$, c'est-à-dire lorsque $x \geq \frac{3}{2}$. **f_8 est donc dérivable sur $]\frac{3}{2}; +\infty[$** . f_8 est de la forme $f(ax + b)$ avec $ax + b = 2x - 3$ et $f : x \longmapsto \sqrt{x}$ On a donc pour tout $]\frac{3}{2}; +\infty[$: $f'_8(x) = af'(ax + b) = 2 \times \frac{1}{2\sqrt{2x-3}} = \frac{2}{2\sqrt{2x-3}} = \frac{1}{\sqrt{2x-3}}$

Exercice 2 :

1) Associer à chacun des points notés sur ce cercle trigonométrique, le nombre réel appartenant à $]-\pi;\pi]$ qui convient.



Point	G	H	I	P
Nombre	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{2\pi}{3}$	$-\frac{2\pi}{3}$	$-\frac{\pi}{4}$

2) Ecrire le **nombre** réel $\frac{29\pi}{6}$ sous la forme $x+2k\pi$ avec $k\in\mathbb{Z}$ et $x\in]-\pi;\pi]$.

- $\frac{29\pi}{6}=\frac{24\pi}{6}+\frac{5\pi}{6}=4\pi+\frac{5\pi}{6}=\frac{5\pi}{6}+2\times 2\pi$ avec $2\in\mathbb{Z}$ et $\frac{5\pi}{6}\in]-\pi;\pi]$

3) x désigne un nombre réel de l'intervalle $[0\,;\frac{\pi}{2}]$ tel que $\sin(x)=\frac{1}{5}$, déterminer la valeur exacte de $cos(x)$.

Pour tout réel x, $on\ a\ cos^2x+sin^2x=1$

D'où : $\cos^2(x)=1-\sin^2(x)=1-\left(\frac{1}{5}\right)^2=1-\frac{1}{25}=\frac{25}{25}-\frac{1}{25}=\frac{24}{25}$

$\cos^2(x)=\frac{24}{25}\quad\Leftrightarrow\cos(x)=\sqrt{\frac{24}{25}}=\frac{2\sqrt{6}}{5}$ ou $\cos(x)=-\frac{2\sqrt{6}}{5}$

Comme $x\in[0;\frac{\pi}{2}]$ on en déduit que $\cos(x)\geqslant 0$ donc on a : $\boldsymbol{\cos(x)=\frac{2\sqrt{6}}{5}}$

4) a. Résoudre l'équation trigonométrique $cosx=\frac{1}{2}$ dans $[0;2\pi[$

$cosx=\frac{1}{2}\Leftrightarrow x=\frac{\pi}{3}\ ou\ x=\frac{5\pi}{3}$

Sur $[0;2\pi[$ l'équation $cosx=\frac{1}{2}$ admet donc deux solutions $\frac{\pi}{3};\frac{5\pi}{3}$

b. Résoudre l'équation trigonométrique $2sinx-\sqrt{3}=0$ dans $]-\pi;\pi]$

$2sinx-\sqrt{3}=0\Leftrightarrow sinx=\frac{\sqrt{3}}{2}\quad\Leftrightarrow x=\frac{\pi}{3}\ ou\ x=\frac{2\pi}{3}$

Sur $]-\pi;\pi]$ l'équation $2sinx-\sqrt{3}=0$ admet donc deux solutions $\frac{\pi}{3};\frac{2\pi}{3}$

c. Résoudre l'inéquation trigonométrique $cosx>\frac{-\sqrt{2}}{2}$ dans $]-\pi;\pi]$

Sur $]-\pi;\pi]$ l'inéquation $cosx>\frac{-\sqrt{2}}{2}$ admet donc pour ensemble solutions $S=]-\frac{3\pi}{4};\frac{3\pi}{4}[$

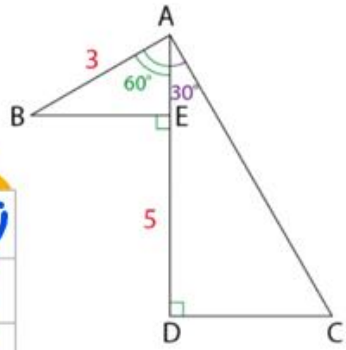
Exercice 3 :

1) Dans chaque cas donner la seule réponse exacte sans justifier

		A	B	C	D
1	ABC est un triangle équilatéral de côté 4. Alors $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}$ est égal à …	8	16	-16	0
2	ABCD est un parallélogramme tel que $AB = 6$ et $AD = 3$. Alors …	$\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{CD} = 36$	$\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{CD} = 18$	$\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{CD} = -36$	$\lVert\overrightarrow{AB}\rVert = \lVert\overrightarrow{BC}\rVert$
3	Dans un repère orthonormé, on donne les points $A(-5\,;-1)$, $B(-3\,;1)$ et $C(2\,;-3)$. Alors …	$\lVert\overrightarrow{AB}\rVert = 4$	$\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC} = 10$	$\overrightarrow{BA}$ et $\overrightarrow{BC}$ sont orthogonaux	$\overrightarrow{CB}\cdot\overrightarrow{CA} = -43$
4	$AB = 4$, $AC = 5$ et $\cos(\widehat{BAC}) = -0{,}5$. Alors …	$\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC} > 0$	$\lVert\overrightarrow{BC}\rVert^2 = 61$	$\lVert\overrightarrow{BC}\rVert = \sqrt{31}$	$\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ sont colinéaires
5	ABC est un triangle isocèle en C tel que $CA = 8$ et $AB = 6$. Alors $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}$ est égal à …	48	24	0	18

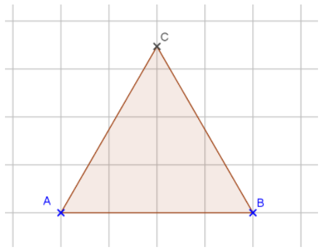
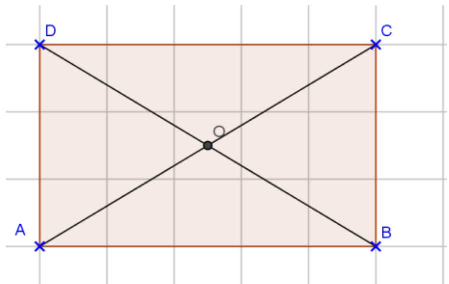
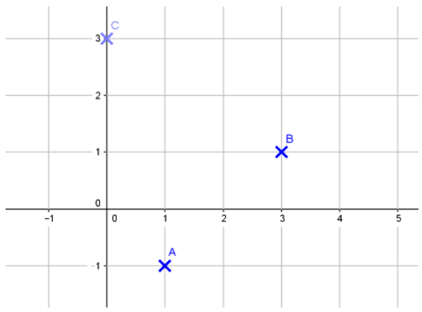
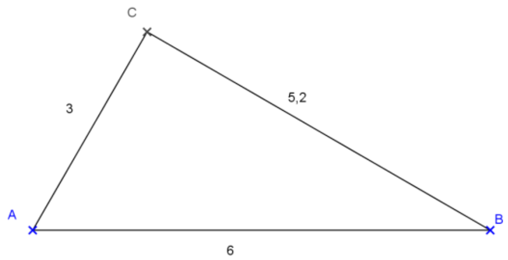
2) Dans chaque cas donner la (ou les) réponse(s) exacte(s) sans justifier

Sur la figure ci-contre, $AB = 3$, $AD = 5$, A, E et D sont alignés, $\widehat{BAE} = 60°$, $\widehat{DAC} = 30°$ et $\widehat{AEB} = \widehat{CDA} = 90°$.

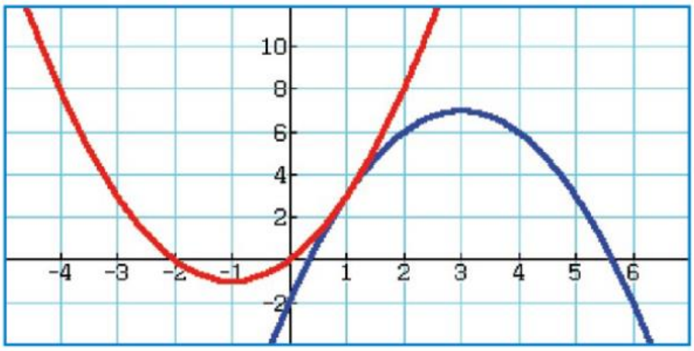


		A	B	C	D
1	$\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AD}$ est …	négatif	positif	égal à $AE \times AD$	égal à 7,5
2	$\overrightarrow{CD}\cdot\overrightarrow{AD}$ est égal à …	$CD \times AD$	0	$\overrightarrow{DC}\cdot\overrightarrow{AE}$	$\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}$
3	$\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{BE}$ est égal à …	4,5	$\dfrac{27}{4}$	$-\dfrac{27}{4}$	$-BE^2$
4	$\overrightarrow{AD}\cdot\overrightarrow{AC}$ est égal à …	$\dfrac{5\sqrt{3}}{2}AC$	25	-25	AD^2

Exercice 4

A, B et C sont trois points distincts tels que AB = 5 et AC = 3 et on a $\left(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC}\right) = \frac{\pi}{3}$ $Calculer\ \ \overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC}$	$\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC} = AB \times AC \times cos\frac{\pi}{3}$ $= 5 \times 3 \times \frac{1}{2} = 7{,}5$
ABC est un triangle équilatéral de longueur AB = 4, A' , B', et C' sont les milieux des côtés [BC] , [AC] et [AB] respectivement, calculer : 	$\overrightarrow{AC}.\overrightarrow{AB} = AC' \times AB = 2 \times 4 = 8$ $\overrightarrow{BC}.\overrightarrow{CA} = -BC \times CA' = -4 \times 2 = -8$
ABCD est un rectangle de centre O tel que AB = 5 et BC = 3. 	*Juste la multiplication est attendue : ne faites pas le calcul s'il vous semble trop compliqué.* $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AO} = 5 \times 2{,}5 = 12{,}5$ $\overrightarrow{AD}.\overrightarrow{CB} = -3 \times 3 = -9$ $\overrightarrow{BC}.\overrightarrow{CO} = -3 \times 1{,}5 = -4{,}5$ $\overrightarrow{DC}.\overrightarrow{AD} = \ 0$
A(1 ; -1) B(3 ;1) et C(0 ; 3) Calculer $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC}$	$\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}3-1\\1+1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}2\\2\end{pmatrix}\ \ \overrightarrow{AC}\begin{pmatrix}0-1\\3+1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-1\\4\end{pmatrix}$ $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC} = 2 \times (-1) + 2 \times 4 = 6$
AB = 6 AC = 3 CB = 5,2 Calculer $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC}$. En déduire la mesure de l'angle en A en degré arrondi à l'unité ou en radian.	$\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC} = \frac{1}{2}(AB^2 + AC^2 - CB^2)$ car $\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AC} = \overrightarrow{CA} + \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CB}$ $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC} = \frac{1}{2}(6^2 + 3^2 - 5{,}2^2) \approx \frac{1}{2} \times 18 = 9$ $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC} = AB \times AC \times \cos\hat{A} = 6 \times 3\cos\hat{A}$ $= 18\cos\hat{A}$ D'où : $18\cos\hat{A} = 9 \iff \cos\hat{A} = 0{,}5$ $\hat{A} = 60°$

Exercice 5* : A l'écran de sa calculatrice, Clément a tracé les courbes représentatives des fonctions :
$x \mapsto x^2 + 2x$ et $x \mapsto -x^2 + 6x - 2$



a) Démontrer que ces deux courbes ont un unique point commun A.
b) Démontrer que les deux courbes ont une tangente commune en A.

a) Pour tout nombre réel x,
$x^2 + 2x = -x^2 + 6x - 2$ équivaut à
$2x^2 - 4x + 2 = 0$, soit $2(x-1)^2 = 0$.
L'unique solution de cette équation est $x = 1$.
Les deux courbes ont un unique point commun, le point A de coordonnées $(1 ; 3)$.
b) $f : x \mapsto x^2 + 2x$ a pour dérivée $f' : x \mapsto 2x + 2$ donc $f'(1) = 4$.
$g : x \mapsto -x^2 + 6x - 2$ a pour dérivée $g' : x \mapsto -2x + 6$ donc $g'(1) = 4$.
$f'(1) = g'(1)$ donc les deux courbes ont une tangente commune au point A.