

Activité de découverte 1 page 67 :

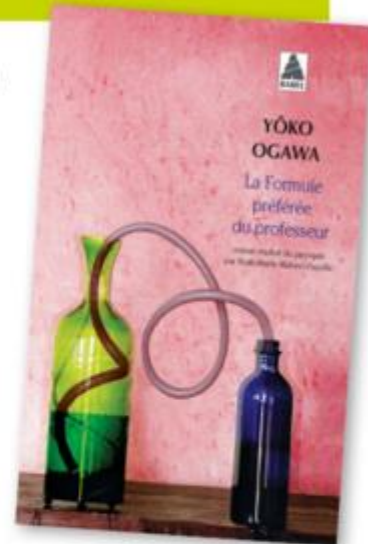
1

La somme des diviseurs d'un nombre

Dans le livre *La Formule préférée du professeur*, la japonaise Yôko Ogawa imagine la rencontre d'un ancien professeur de mathématiques et d'une aide-ménagère. Au dos de la montre du professeur est écrit « Prix du Président de l'Université n° 284 » et la date de naissance de son aide ménagère « 20 février ». Au Japon, pour écrire les dates, on note d'abord le mois puis le jour, donc cette date de naissance correspond au nombre 220. Le professeur dit : « Vous ne trouvez pas que c'est beau ? » Les questions suivantes vont permettre de comprendre ce que veut dire le professeur.

- 1 a) Écrire tous les diviseurs de 284.
b) Écrire tous les diviseurs de 220 (il y en a deux fois plus que pour 284).
- 2 a) Calculer la somme de tous les diviseurs de 284, autres que 284 lui-même.
b) Calculer la somme de tous les diviseurs de 220, autres que 220 lui-même.
c) Décrire par une phrase ce que l'on remarque.

En mathématiques, on dit que 284 et 220 sont des **nombres amicaux**. Aujourd'hui, les ordinateurs ont permis de découvrir plus de 2 000 000 de paires de nombres amicaux, mais les mathématiciens ne savent toujours pas s'il en existe une infinité de paires.



- 18** Recopier et compléter chaque phrase.
- a) $144 = 24 \times 6$ donc 24 est un ... de 144.
 - b) $\frac{84}{7} = 12$ donc 84 est ... par 7 et par
 - c) $295 = 59 \times 5$ donc 295 est un ... de 59 et de

19 Traduire chaque affirmation par une égalité.

a) -132 est un multiple de 11.

b) 18 divise -270 .

c) 32 058 est divisible par 9.

d) 29 est un diviseur de 406.

22 Jade a un ticket gagnant d'une tombola.
Elle dit : « C'est le ticket ci-dessous qui porte
un numéro multiple à la fois de 15 et de 19. »
Quel est le ticket de Jade ?

5 095

4 245

4 845

5 035

Écrire la liste des diviseurs d'un nombre : exo corrigé 1p70

Écrire la liste des diviseurs positifs du nombre 48.

Solution

48 est divisible par 1 : $48 = 1 \times 48$

48 est divisible par 2 : $48 = 2 \times 24$

48 est divisible par 3 : $48 = 3 \times 16$

48 est divisible par 4 : $48 = 4 \times 12$

48 n'est pas divisible par 5.

48 est divisible par 6 : $48 = 6 \times 8$

48 n'est pas divisible par 7.

Les diviseurs de 48 sont : 1, 2, 3, 4, 6, 8, 12, 16, 24, 48.

On obtient la liste des diviseurs d'un nombre en le divisant par les nombres entiers dans l'ordre croissant.

On s'arrête ici à la division par 7 parce qu'on sait que 8 est un diviseur.

- **26** a) Écrire la liste des diviseurs positifs de 72.
b) Écrire la liste des diviseurs positifs de 84.
c) Quel est le plus grand diviseur commun à 72 et 84 ?

• **23** Quel est le plus petit nombre entier naturel non nul qui est à la fois divisible :

- a) par 2 et par 9 ? b) par 4 et par 8 ?
c) par 6 et par 9 ? d) par 12 et par 16 ?

Cours II Multiples et diviseurs

Utiliser des écritures littérales de
nombres

• **31** Voici des nombres, où k désigne un nombre de $\mathbb{Z}$.

$$5(2k)$$

$$5k$$

$$5k - 1$$

$$5k + 1$$

1. Parmi ces nombres, lequel désigne :

- a) un multiple quelconque de 5 ?
b) le suivant d'un multiple de 5 ?
c) un multiple pair de 5 ?

2. Décrire oralement le nombre non utilisé.

• **33** a désigne un nombre de $\mathbb{Z}$.

Démontrer que :

- a) la différence de deux multiples quelconques de a est un multiple de a ;
- b) le produit de deux multiples quelconques de a est un multiple de a .

• **35** n désigne un nombre de $\mathbb{Z}$.

- a) Écrire alors le nombre précédent et celui suivant n .
- b) Additionner ces trois nombres. De quel nombre la somme est-elle un multiple ?
- c) Énoncer une propriété traduisant ce résultat.

• **36** n désigne un nombre de $\mathbb{Z}$.

- a) Additionner n , les deux nombres qui précèdent n et les deux nombres qui le suivent.
- b) De quel nombre cette somme est-elle un multiple ?

Cours III Nombres pairs et impairs

Comprendre les notions (Questions flash) :

• **29** n désigne un nombre de $\mathbb{Z}$.

Lesquelles de ces écritures désignent un nombre pair ?

- (1) $2n$ (2) $4n$ (3) $2n + 3$ (4) $2n - 2$

• **30** n désigne un nombre de $\mathbb{Z}$.

Lesquelles de ces écritures désignent un nombre impair ?

- (1) $2n + 1$ (2) $2n - 1$ (3) $4n + 3$ (4) $2n + 4$

• **32** Sam affirme : « La somme de trois nombres entiers consécutifs est toujours paire. »

Que peut-on en penser ?

Utiliser des écritures littérales de nombres :

• **37** a) Donner des expressions de deux nombres pairs.

b) Multiplier ces deux nombres.

Quelle est la parité de ce produit ?

c) Énoncer une propriété traduisant ce résultat.

40 k désigne un nombre de $\mathbb{Z}$.

a) $2k + 1$ est un nombre impair.

Exprimer en fonction de k le nombre impair qui suit $2k + 1$.

b) Additionner ces deux nombres impairs.

De quel nombre la somme est-elle un multiple ?

c) Énoncer une propriété traduisant ce résultat.

94 Raisonner par disjonction de cas

Méthode

Pour résoudre un problème, on peut séparer l'étude en plusieurs cas, chacun d'eux étant plus facile à résoudre que le problème global.

n désigne un nombre de $\mathbb{N}$.

On note A le nombre tel que $A = 3n^2 + 2n + 1$.

Étudier la parité de A selon les valeurs de n .

Pour cela, on peut envisager le cas où n est pair puis le cas où n est impair.

• **41** Expliquer oralement pourquoi aucun de ces nombres n'est premier.

a) 39 **b)** 72 **c)** 145 **d)** 153

• **42** Claire affirme : « La somme de deux nombres premiers peut être un nombre premier. »
Que peut-on en penser ?

• **43** Luka affirme : « La somme de deux nombres impairs quelconques est un nombre premier. »
Que peut-on en penser ?

• **44** Laquelle de ces affirmations est exacte ?
(1) Tous les nombres premiers sont impairs.
(2) Le nombre premier le plus proche de 20 est 21.
(3) Il existe deux nombres premiers dont la somme est 30.

Déterminer si un nombre est premier ou non :

135 Étudier un programme de calcul

! | Probleme ouvert

Chercher **Raisonner**

Voici un programme de calcul.

- Choisir un nombre premier différent de 2.
- Calculer le carré de ce nombre.
- Soustraire 1.

Démontrer que, quel que soit le nombre premier choisi au départ, le résultat de ce programme est un multiple de 4.

45 Dans chaque cas, dire si le nombre est premier.
a) 13 b) 24 c) 29 d) 92 e) 53

47 Expliquer pourquoi chacun de ces nombres n'est pas premier.

a) $2 \times 9 \times 5 + 3$ b) $36 \times 5 \times 7 + 27$

50 Priscilla affirme : « La somme de trois nombres impairs consécutifs n'est jamais un nombre premier. »
Que peut-on en penser ?

Décomposition en produit de facteurs premiers :

52 Lilian affirme : « La décomposition en produit de facteurs premiers de 1 024 est $2^6 \times 64$. »
A-t-il raison ?

53 On sait que $132 = 12 \times 11$.
Donner oralement la décomposition en produit de facteurs premiers de 132.

54 Décomposer mentalement chaque nombre en produit de facteurs premiers.

a) 15 b) 8 c) 18 d) 25 e) 36

55 Laquelle de ces affirmations est fausse ?
La décomposition en produit de facteurs premiers :
(1) de 150 est $2 \times 3 \times 5^2$.
(2) de 1 455 est $2 \times 5 \times 97$.
(3) de 584 est $2^3 \times 73$.

56 Océane a écrit $224 = 7 \times 8 \times 4$ et il n'y a pas d'erreur.

Utiliser cette écriture pour obtenir la décomposition en produit de facteurs premiers de 224.

57 Décomposer chaque nombre en produit de facteurs premiers.

- a) 54 b) 82 c) 72 d) 120 e) 48

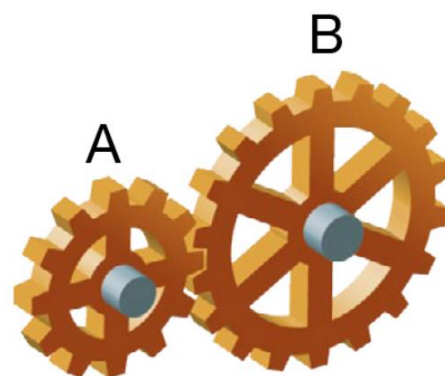
111 1. Décomposer 220 puis 90 en produits de facteurs premiers.

2. Les nombres suivants sont-ils multiples de 220 ? de 90 ?

- a) $2^3 \times 5 \times 11$ b) $2 \times 3^3 \times 5 \times 11$ c) $2^2 \times 11$
d) $2 \times 3 \times 5 \times 11 \times 13$ e) $2^2 \times 3^3 \times 5^2 \times 11^2$

3. Déduire de la question 1 le plus petit multiple commun à 220 et 90.

112 Une roue d'engrenage A a 18 dents. Elle est en contact avec une roue B de 24 dents.



- a) Décomposer 18 et 24 en produits de facteurs premiers.
- b) Au bout de combien de tours de chacune des roues seront-elles à nouveau, et pour la première fois, dans la même position ?

Cours V Fractions irréductibles :

Exercice résolu 9 page 71

9 Rendre irréductible une fraction

→ Cours 2. 

M est le nombre $\frac{45738}{6160}$.

- a) Simplifier M et présenter le résultat avec une fraction irréductible.
b) Quelle est la nature de ce nombre M ?

Solution

- a) On décompose 45738 et 6160 en produits de facteurs premiers.

45738	2
22869	3
7623	3
2541	3
847	7
121	11
11	11
1	

6160	2
3080	2
1540	2
770	2
385	5
77	7
11	11
1	

On divise successivement par les nombres premiers dans l'ordre croissant.
On peut utiliser la calculatrice pour déterminer les quotients.

$$45738 = 2 \times 3^3 \times 7 \times 11^2 \quad 6160 = 2^4 \times 5 \times 7 \times 11$$

$$M = \frac{45738}{6160} = \frac{2 \times 3^3 \times 7 \times 11^2}{2^4 \times 5 \times 7 \times 11} = \frac{3^3 \times 11}{2^3 \times 5} = \frac{297}{40}$$

- b) La décomposition en produit de facteurs premiers du dénominateur ne contient que des puissances de 2 et de 5, donc M est un nombre décimal ($M = 7,425$).

Rendre une fraction irréductible :

76 Utiliser des décompositions en produits de facteurs premiers pour rendre irréductible chaque fraction.

a) $\frac{224}{280}$

b) $\frac{420}{882}$

c) $\frac{8800}{3775}$

d) $\frac{1056}{1596}$

123 Déterminer une fraction égale à $\frac{15}{21}$ dont la somme du numérateur et du dénominateur est 132.