I - Multiples et diviseurs d'un nombre :

a) Définition :

Soient a et b deux nombres entiers relatifs avec b non nul.
On dit que b est un **multiple** de a s'il existe un entier relatif k tel que $\boldsymbol{b = k \times a}$.

On dit aussi que a est un **diviseur** de b ou que b est **divisible** par a

b) Exemples:

- $-21 = -3 \times 7$ donc -21 est un multiple de 7 et 7 est un diviseur de -21.
- 13 n'est pas un multiple de 3 car il n'existe pas d'entier k tel que $13 = k \times 3$..
- Le nombre 0 est multiple de tous les nombres entiers relatifs : pour n'importe quel nombre $b \in \mathbb{Z}$, $0 = 0 \times b$.
- Le nombre 1 est diviseur de tous les nombres relatifs : pour n'importe quel nombre $a \in \mathbb{Z}$, $a = a \times 1$.

c) Propriété :

La somme de deux multiples d'un entier relatif a est un multiple de a.

- Exemple : Démontrons que la somme de 9 et 15 est aussi un multiple de 3.

9 et 15 sont des multiples de 3, car $9 = 3 \times 3$ et $15 = 3 \times 5$

Ainsi $9 + 15 = 3 \times 3 + 3 \times 5 = 3 \times (3 + 5) = 3 \times 8$

Donc $9 + 15$ est un multiple de 3.

Démonstration de la propriété dans le cas où $a = 3$.
On considère b et b' deux multiples de 3. Il existe donc des nombres relatifs k et k' tels que $b = k \times 3$ et $b' = k' \times 3$.

Ainsi, $b + b' = 3 \times k + 3 \times k' = 3 \times (k + k')$.

Or la somme de deux nombres entiers relatifs est un entier relatif donc $k + k'$ est un entier relatif.

Donc $b + b'$ est un multiple de 3.

- Exercice 1 : Ecrire la liste des diviseurs positifs du nombre 60.

$$\begin{aligned}
60 &= 1 \times 60 \\
60 &= 2 \times 30 \\
60 &= 3 \times 20 \\
60 &= 4 \times 15 \\
60 &= 5 \times 12 \\
60 &= 6 \times 10
\end{aligned}$$

Les diviseurs de 60 sont : 1 ; 2 ; 3 ; 4 ; 5 ; 6 ; 10 ; 12 ; 15 ; 20 ; 30 ; 60.

❖ Exercice 2 : Exprimer des nombres avec des lettres.

On donne $a = 10k$ et $b = 6k$, avec k entier.

1. Montrer que a est un multiple de 2.
2. Montrer que b est un multiple de 3.
3. Est-ce que 8 est un diviseur de $a + b$.

1. $a = 10k = 2 \times 5k$, or $5k$ est un entier relatif donc a est bien un multiple de 2.

2. $b = 6k = 3 \times 2k$, or $2k$ est un entier relatif donc b est bien un multiple de 3.

3. $a + b = 10k + 6k = 16k = 8 \times 2k$, or $2k$ est un entier relatif donc 8 est bien un diviseur de $a + b$.

II - Nombre pairs et nombres impairs :

a) Propriété :

- Un nombre n de $\mathbb{Z}$ est pair s'il existe un nombre k de $\mathbb{Z}$ tel que $n = 2k$.
- Un nombre n de $\mathbb{Z}$ est impair s'il existe un nombre k de $\mathbb{Z}$ tel que $n = 2k + 1$.

b) Exemples:

$150 = 75 \times 2$ est pair.
$151 = 75 \times 2 + 1$ est impair

c) Propriété :

Le carré d'un nombre impair est impair.

Démonstration :

On considère un nombre impair n. Il existe donc un nombre relatif k tel que $n = 2k + 1$.

Ainsi $n^2 = (2k + 1)^2 = 4k^2 + 4k + 1 = 2(2k^2 + 2k) + 1 = 2K + 1$ avec $K = 2k^2 + 2k$.

Or K est aussi un entier relatif et $2K + 1$ est un nombre impair

Donc n^2 est impair. CQFD

CQFD signifie « Ce Qu'il Fallait Démontrer ». Vous pouvez utiliser la version en latin « Quod erat demonstrandum » ça fait très chic.

III - Nombres premiers (rappel) :

a) Définition :

Un nombre entier naturel est **premier** s'il possède exactement deux diviseurs : 1 et lui-même.

2 ; 3 ; 5 ; 7 ; 11 ; 13 ; 17 ; 19 ; 23 ; 29 sont premiers, cette liste est infinie.

b) Exemples:

- 0 n'est pas premier car il est divisible par n'importe quel nombre entier non nul.

- 1 n'est pas premier car il n'a qu'un seul diviseur.
- 9 n'est pas premier car il a trois diviseurs : 1 ; 3 ; 9.

c) Propriété:

Tout nombre non premier peut se décomposer en produits de facteurs premiers.
Cette décomposition est **unique** à l'ordre des facteurs près.

d) Exercices : Décomposer le nombre 300 en produit de facteurs premiers

Méthode 1 : On écrit successivement des produits égaux à 300 jusqu'à n'obtenir que des nombres premiers .

$300 = 3\times100 = 3\times2\times50 = 3\times2\times5\times10 = 3\times2\times5\times2\times5 = 2\times2\times3\times5\times5$
$300 = 2^2\times3\times5^2$

Méthode 2: On cherche ses diviseurs dans l'ordre croissant des nombres premiers.

$$\begin{array}{r|l} 300 & 2 \\ 150 & 2 \\ 75 & 3 \\ 25 & 5 \\ 5 & 5 \\ 1 & \end{array}$$

$300 = 2\times2\times3\times5\times5 = 2^2\times3\times5^2$

IV - Fractions irréductibles :

a) Définition d'une fraction irréductible :

Une fraction est dite **irréductible** lorsque son numérateur et son dénominateur n'ont qu'un seul diviseur commun : 1.

Remarque : On dit que deux nombres sont premiers entre eux lorsque leur seul diviseur commun est 1.

b) Methode pour rendre une fraction irréductible

Rendre irréductible la fraction $\frac{60}{126}$.

Pour rendre une fraction irréductible, il faut décomposer son numérateur et son dénominateur en produits de facteurs premiers.

$$\begin{array}{r|l} 60 & 2 \\ 30 & 2 \\ 15 & 3 \\ 5 & 5 \\ 1 & \end{array} \qquad \begin{array}{r|l} 126 & 2 \\ 63 & 3 \\ 21 & 3 \\ 7 & 7 \\ 1 & \end{array}$$

On ainsi les décompositions de 60 et 126 :
60 = 2 x 2 x 3 x 5 et 126 = 2 x 3 x 3 x 7Ainsi $\frac{60}{126} = \frac{2\times2\times3\times5}{2\times3\times3\times7} = \frac{2\times5}{3\times7} = \frac{10}{21}$. 10 et 21 sont premiers entre eux

donc $\frac{10}{21}$ est la fraction irréductible égale à $\frac{60}{126}$.