

Exercice 1 :

Un complexe cinématographique a ouvert ses portes en 2018 en périphérie d’une ville. En 2018, le complexe a accueilli 180 mille spectateurs. La gestionnaire du complexe prévoit une augmentation de 4 % par an de la fréquentation du complexe.

Soit n un entier naturel. On note u_n le nombre de spectateurs, en milliers, du complexe cinématographique pour l’année $(2018 + n)$. On a donc $u_0 = 180$

1) Étude de la suite (u_n)

a) Calculer le nombre de spectateurs en 2019.

Augmenter de 4 %, revient à multiplier par $1 + 4\% = 1 + 0,04 = 1,04$.

On a donc $u_1 = u_0 \times 1,04 = 180 \times 1,04 = 187,2$.

Le nombre de spectateurs en 2019 devrait être égal à 187 200.

b) Justifier que la suite (u_n) est géométrique. Préciser sa raison.

Le nombre de spectateurs est celui de l’année d’avant multiplié par 1,04.

On a donc : pour tout naturel n , $u_{n+1} = u_n \times 1,04$, ce qui montre que la suite (u_n) est géométrique de premier terme 180 et de raison 1,04.

c) Exprimer un en fonction de n , pour tout entier naturel n .

On a donc, pour tout $n \in \mathbb{N}$. $u_n = u_0 \times 1,04^n = 180 \times 1,04^n$,

2) Un cinéma était déjà installé au centre-ville. En 2018, il a accueilli 260 000 spectateurs. Avec l’ouverture du complexe, le cinéma du centre-ville prévoit de perdre 10 000 spectateurs par an. Pour n , entier naturel, on note v_n le nombre de spectateurs, en milliers, accueillis dans le cinéma du centre-ville l’année $(2018 + n)$.

On a donc $v_0 = 260$.

a) Quelle est la nature de la suite (v_n) ?

On a donc pour tout naturel n , $v_{n+1} = v_n - 10$, ce qui montre que la suite (v_n) est une suite arithmétique de premier terme $v_0 = 260$ et de raison $r = -10$.

b) On donne le programme ci-dessous, écrit en Python.

Quelle est la valeur renvoyée lors de l’exécution de la fonction `cinema()` ? L’interpréter dans le contexte de l’exercice.

```
def cinema():
    n=0
    u=180
    v=260
    while u<v:
        n=n+1
        u=u*1.04
        v=v-10
    return n
```

La fonction `cinema()` renvoie $n = 5$.

n	0	1	2	3	4	5
u_n	180	187,2	194,7	202,5	210,6	219
v_n	260	250	240	230	220	210

Ceci montre que la 5e année, soit en 2023, le nombre de spectateurs du nouveau complexe sera supérieur à celui de l’ancien cinéma.

Exercice 2 :

1. Dans chaque cas, déterminer pour quelles(s) valeurs de n , u_n prend la valeur 5.

a) (u_n) définie pour tout $n \in \mathbb{N}$ par $u_n = -2n + 21$

b) (u_n) définie pour tout $n \in \mathbb{N}$ par $u_n = \frac{n+26}{n+2}$

$$a) u_n = 5 \Leftrightarrow -2n + 21 = 5 \Leftrightarrow n = \frac{5-21}{-2} = 8$$

$$b) u_n = 5 \Leftrightarrow \frac{n+26}{n+2} = 5 \Leftrightarrow 5(n+2) = n+26 \Leftrightarrow 5n+10 = n+26 \Leftrightarrow 4n = 16 \Leftrightarrow n = 4$$

Exercice 3 : Position relative d'une parabole et d'une droite

On veut étudier la position relative d'une parabole d'équation $y = 2x^2 - 3x + 5$ et d'une droite d'équation $y = 5x - 3$.

1. Déterminer le ou les points d'intersection de la parabole et de la droite.

Les abscisses des points d'intersections correspondent aux solutions de l'équation $2x^2 - 3x + 5 = 5x - 3$.

$$2x^2 - 3x + 5 = 5x - 3 \Leftrightarrow 2x^2 - 8x + 8 = 0$$

$\Delta = (-8)^2 - 4 \times 2 \times 8 = 0$. l'équation possède une racine unique :

$$x_0 = \frac{-(-8)}{2 \times 2} = \frac{8}{4} = 2 \quad y = 5 \times 2 - 3 = 7$$

Le point d'intersection de la droite et de la parabole a pour coordonnées $(2 ; 7)$.

2. On pose $f(x) = 2x^2 - 3x + 5$ et $g(x) = 5x - 3$.

a) Etudier le signe de $f(x) - g(x)$.

Etudions le signe de la différence $f(x) - g(x)$:

$$f(x) - g(x) = 2x^2 - 3x + 5 - (5x - 3) = 2x^2 - 8x + 8.$$

D'après la question précédente, ce polynôme a pour unique racine 2 et comme $a = 2 > 0$

Le signe de la différence est donc positif ou nulle pour tout réel x .

b) En déduire la position relative de la parabole et de la droite.

La courbe C_f est au-dessus de la courbe C_g pour tout x réel, sauf en $x = 2$, où les deux courbes se coupent.

Exercice 4 :

On peut montrer que deux suites sont égales, en montrant qu'elles ont le même premier terme et qu'elles suivent la même relation de récurrence.

On considère la suite (u_n) définie sur $\mathbb{N}$ par $u_n = 2^n - 1$.

On considère la suite (v_n) définie par $v_0 = 0$ et, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $v_{n+1} = 2v_n + 1$.

On veut montrer que les deux suites (u_n) et (v_n) sont égales.

1. Calculer les trois premiers termes de chaque suite.

$$u_0 = 2^0 - 1 = 1 - 1 = 0$$

$$u_1 = 2^1 - 1 = 2 - 1 = 1$$

$$u_2 = 2^2 - 1 = 4 - 1 = 3$$

$$v_0 = 0$$

$$v_1 = 2v_0 + 1 = 2 \times 0 + 1 = 1$$

$$v_2 = 2v_1 + 1 = 2 \times 1 + 1 = 3$$

2. Montrer que, pour tout entier n , on a $u_{n+1} = 2u_n + 1$.

Pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$u_{n+1} = 2^{n+1} - 1$$

$$\text{et } 2u_n + 1 = 2 \times (2^n - 1) + 1 = 2 \times 2^n - 2 + 1 = 2^{n+1} - 1$$

$$\text{Donc } u_{n+1} = 2u_n + 1$$

Autre méthode un peu moins instinctive

$$\text{Pour tout } n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = 2^{n+1} - 1 = 2 \times 2^n - 1 - 1 + 1 = 2 \times 2^n - 2 + 1 = 2 \times (2^n - 1) + 1$$

$$\text{Donc } u_{n+1} = 2u_n + 1$$

3. Conclure.

Les suites (u_n) et (v_n) ont le même premier terme $u_0 = v_0 = 0$ et la même relation de récurrence, elles sont donc égales.

Exercice 5 :

On considère l'équation $(m + 8)x^2 + mx + 1 = 0$.

Pour quelles valeurs de m cette équation admet-elle une unique solution ?

$$\text{Calculons le déterminant } \Delta = m^2 - 4 \times (m + 8) \times 1 = m^2 - 4m - 32$$

L'équation admet une unique solution si et seulement si $\Delta = 0$

$$\text{On doit donc résoudre } m^2 - 4m - 32 = 0$$

Calculons le déterminant $\Delta' = (-4)^2 - 4 \times 1 \times (-32) = 144 > 0$, l'équation possède deux solutions distinctes :

$$m_1 = \frac{-4-12}{2} = -8 \quad \text{et} \quad m_2 = \frac{-4+12}{2} = 4$$

$$\text{Si } m = -8, \text{ l'équation obtenue est } (-8 + 8)x^2 + -8x + 1 = 0 \Leftrightarrow -8x + 1 = 0$$

$$\text{Si } m = 4, \text{ l'équation obtenue est } (-8 + 4)x^2 + 4x + 1 = 0 \Leftrightarrow 4x^2 + 4x + 1 = 0$$